Giorgio Taricco Emanuele Viterbo
Politecnico di Torino

Giuseppe Caire
Eurecom - Francia

COMUNICAZIONI ELETTRICHE

(ESERCIZI SVOLTI - SECONDA EDIZIONE)

CLUT
1999

Stile LaTeX: `clut.sty`

Stampato in Italia da
Copyright C.L.U.T. - Torino -

ISBN 88-7992-143-6

Edizioni C.L.U.T. - Torino
Corso Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 Torino tel. 54 21 92
Via S. Ottavio, 20 - 10124 Torino tel. 88 89 08

Indice

Presentazione

Questo libro raccoglie gli esercizi del corso di Comunicazioni Elettriche per gli allievi ingegneri in Telecomunicazioni del Politecnico di Torino.

Il testo è diviso in due parti: la prima con i testi degli esercizi; la seconda con le relative soluzioni. Si consiglia di risolvere gli esercizi personalmente e di confrontare in un secondo tempo la propria soluzione con quella proposta.

Alcuni testi sono rielaborazioni di esercizi proposti negli anni precedenti, altri sono temi d'esame scelti tra i più significativi degli ultimi appelli. Gli esercizi proposti ricoprono la maggior parte degli argomenti trattati a lezione e costituiscono il supporto delle esercitazioni.

Nella seconda parte, anteposti alle soluzioni degli esercizi, sono riportati alcuni richiami teorici aventi applicazione nel contesto corrente. Tali richiami integrano, senza sostituirli, gli argomenti svolti a lezione.

Obiettivo del libro è dare agli allievi maggior confidenza nella soluzione di problemi teorici e applicativi nell'ambito di una disciplina impegnativa qual è quella delle comunicazioni elettriche.

In questa seconda edizione, riveduta ed ampliata, sono stati aggiunti nuovi esercizi svolti e le tracce di alcune esercitazioni di laboratorio.

pagina vuota

Parte I

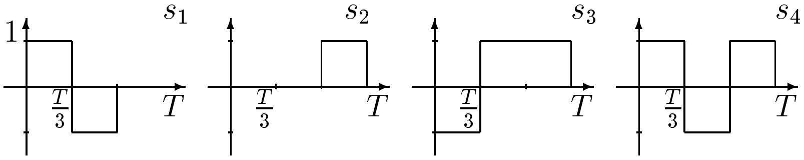
Testi degli esercizi

Capitolo 1

Richiami di teoria dei segnali e teorema del campionamento

1.1 Esercizio 1.1

Applicare la procedura di Gram-Schmidt ai seguenti segnali, nell'ordine dato, e rappresentarli come vettori rispetto alla base ortonormale trovata.



Esercizio 1.2

Sia $p_T(t) = u(t) - u(t-T)$ e $f_0 T >> 1$. Rappresentare geometricamente l'insieme di segnali

$$s_i(t) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \Re\{A p_T(t) e^{j(\frac{2\pi}{7}(i-1)+\frac{\pi}{7})} e^{j2\pi f_0 t}\} & i = 1, \ldots, 7 \end{cases}$$

e trovare l'energia media e la distanza minima.

Esercizio 1.3

Sia $p_T(t) = u(t) - u(t-T)$ e $f_0 T >> 1$. Rappresentare geometricamente l'insieme di segnali

$$s_i(t) = \begin{cases} \Re\{A p_T(t) e^{j\frac{\pi}{2}i} e^{j2\pi f_0 t}\} & i = 0,1,2,3 \\ \Re\{\sqrt{2} A p_T(t) e^{j(\frac{\pi}{2}(i-4)+\frac{\pi}{4})} e^{j2\pi f_0 t}\} & i = 4,5,6,7 \end{cases}$$

e trovare l'energia media e la distanza minima.

Esercizio 1.4

Sia $p_T(t) = u(t) - u(t-T)$ e $f_0T >> 1$. Rappresentare geometricamente l'insieme di segnali

$$s_i(t) = \begin{cases} \Re\{Ap_T(t)e^{j(\frac{\pi}{2}i+\frac{\pi}{4})}e^{j2\pi f_0 t}\} & i = 0,1,2,3 \\ \Re\{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}Ap_T(t)e^{j\frac{\pi}{2}(i-4)}e^{j2\pi f_0 t}\} & i = 4,5,6,7 \end{cases}$$

e trovare l'energia media e la distanza minima.

Esercizio 1.5

Sia $p_T(t) = u(t) - u(t-T)$ e $f_0T >> 1$. Rappresentare geometricamente l'insieme di segnali

$$s_i(t) = \begin{cases} \Re\{Ap_T(t)e^{j\pi i}e^{j2\pi f_0 t}\} & i = 0,1 \\ \Re\{\sqrt{3}Ap_T(t)e^{j(\pi(i-2)+\frac{\pi}{2})}e^{j2\pi f_0 t}\} & i = 2,3 \end{cases}$$

e trovare l'energia media e la distanza minima.

Esercizio 1.6

Sia $p_T(t) = u(t) - u(t-T)$ e $f_0T >> 1$. Rappresentare geometricamente l'insieme di segnali

$$s_i(t) = \begin{cases} \Re\{Ap_T(t)e^{j\frac{2\pi}{3}i}e^{j2\pi f_0 t}\} & i = 0,1,2 \\ \Re\{\sqrt{2}Ap_T(t)e^{j2\pi(f_0+\frac{1}{2T})t}\} & i = 3 \end{cases}$$

e trovare l'energia media e la distanza minima.

Esercizio 1.7

Sia $p_T(t) = u(t) - u(t-T)$ e $f_0T >> 1$. Rappresentare geometricamente l'insieme di segnali

$$s_{i,k}(t) = \Re\{Ap_T(t)e^{j\pi i}e^{j2\pi(f_0+\frac{k}{2T})t}\}$$

per $i = 0,1$ e per $k = 0,1,2$ e trovare l'energia media e la distanza minima.

Esercizio 1.8

Dimostrare la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz per i vettori

$$| < \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} > |^2 \leq < \boldsymbol{x},\boldsymbol{x} >< \boldsymbol{y},\boldsymbol{y} >$$

e, usando un passaggio al limite e la definizione di integrale alla Riemann, ottenere la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz per gli integrali

$$\left| \int_a^b x(t)y(t)^* dt \right|^2 \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \int_a^b |y(t)|^2 dt$$

Qual'è la relazione fra $x(t)$ e $y(t)$ tale per cui è valida l'eguaglianza?

Esercizio 1.9

Un segnale in banda base $x(t)$ ha trasformata di Fourier data da

$$X(f) = \begin{cases} 1 & |f| < W/2 \\ 2 - 2|f|/W & W/2 \leq |f| < W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il segnale viene passato attraverso la trasformazione

$$y(t) = \mathrm{LPF}_W \left\{ 2\cos(2\pi f_0 t)[\mathcal{H}\{x(t)\}\sin(2\pi f_0 t) - \mathcal{H}\{x(t)\sin(2\pi f_0 t)\}] \right\}$$

dove $\mathcal{H}\{\cdots\}$ indica la trasformata di Hilbert e $\mathrm{LPF}_W\{\cdot\}$ indica un filtraggio passabasso ideale con banda W. Disegnare lo schema a blocchi della trasformazione $x(t) \to y(t)$ e determinare $y(t)$.

Esercizio 1.10

Un segnale in banda base ha banda 6 kHz. Qual'è la minima frequenza di campionamento per avere perfetta ricostruzione? Qual'è la minima frequenza di campionamento se si richiede una banda di guardia di 1 kHz? Qual'è la minima frequenza di campionamento e il valore di K per la perfetta ricostruzione del segnale se il filtro di ricostruzione ha funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} K & |f| < 7kHz \\ K - K\frac{|f|-7000}{4000} & 7kHz \leq |f| < 11kHz \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 1.11

Un segnale $x(t)$ in banda base ha una banda W Hz e viene campionato a frequenza $1/T_s$. Il segnale campionato è

$$x_p(t) = \sum_k x(kT_s)p(t - kT_s)$$

dove $p(t)$ è un impulso arbitrario, non necessariamente limitato al supporto $[0,T_s]$. Trovare la trasformata di Fourier di $x_p(t)$. Trovare le condizioni di perfetta ricostruzione di $x(t)$ da $x_p(t)$ e trovare il filtro di perfetta ricostruzione.

Esercizio 1.12

Un segnale in banda base $x(t)$ con banda 100 Hz è campionato alla frequenza di Nyquist e i campioni risultanti sono

$$x(kT_s) = \begin{cases} 1 & -5 \leq k < 0 \\ -1 & 0 < k \leq 5 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Determinare $x(0.002)$.

Esercizio 1.13

Una variabile casuale X è distribuita secondo $f_X(x) = \Lambda(x)$ (dove $\Lambda(x)$ indica la funzione triangolare con supporto $[-1,1]$ e integrale unitario). Trovare: 1) la c.d.f di X. 2) $P(X > 1/2)$. 3) $P(X > 0|X < 1/2)$. 4) $f_X(x|X > 1/2)$. 5) $E[X|X > 1/2]$.

Esercizio 1.14

Due variabili casuali X e Y hanno densità di probabilità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} K(x+y) & 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Trovare: 1) il valore di K. 2) $P(X+Y > 1)$. 3) $P(X > Y)$. 4) $P(X > Y|X+2Y > 1)$. 5) $P(X = Y)$. 6) $P(X > 0.5|X = Y)$. 7) $f_X(x)$ e $f_Y(y)$. 8) $f_X(x|X+2Y > 1)$. 9) $E[x|X+2Y > 1]$.

Esercizio 1.15

Un rumore Gaussiano bianco $n(t)$ con densità spettrale di potenza $N_0/2$ viene filtrato da un filtro passabanda ideale con guadagno 1 e banda $2W$ centrata intorno alla frequenza $f_c \gg W$, ottenendo il processo $\nu(t) = \Re\{\tilde{\nu}(t)e^{j2\pi f_0 t}\}$. Nei due casi $f_0 = f_c$ e $f_0 = f_c - W$ si determini:

1. La densità spettrale di potenza della parte in fase e della parte in quadratura di $\nu(t)$ e la loro densità spettrale di potenza mutua.
2. La densità spettrale di potenza dell'inviluppo complesso $\tilde{\nu}(t)$.

Esercizio 1.16

Un rumore Gaussiano ha densità spettrale di potenza $S_n(f) = 0.001\Lambda(f/1000)$. Il processo viene passato attraverso un filtro passabanda ideale con banda 10 Hz, centrato intorno alla frequenza 500 Hz. Trovare la potenza del processo di uscita e scrivere l'espressione del processo di uscita mediante la parte in fase e la parte in quadratura. Trovare la potenza della parte in fase e della parte in quadratura (assumere $f_0 = 500$ Hz).

Esercizio 1.17

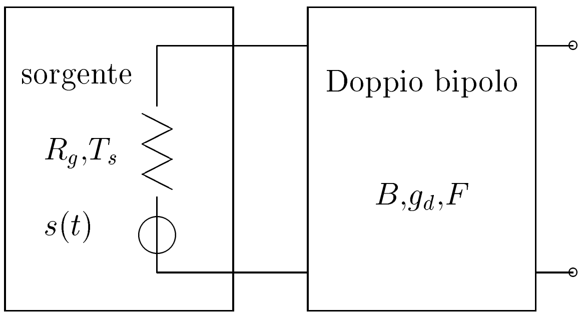
$x(t)$ è un processo stazionario in senso lato con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau) = e^{-|\tau|/T_0}$ (con $T_0 > 0$). Questo processo viene passato attraverso un sistema lineare tempo-invariante con risposta all'impulso $h(t) = e^{-t/t_0}u(t)$, con $t_0 > 0$. Trovare la densità spettrale di potenza del processo di uscita.

Capitolo 2

Rumore termico

Esercizio 2.1

Il sistema descritto in figura è costituito da un generatore di segnale $s(t)$ con resistenza interna R_g a temperatura T_s, collegato ad un doppio bipolo lineare a banda stretta con adattamento di carico in ingresso. Tale doppio bipolo è caratterizzato da banda equivalente di rumore B, guadagno disponibile g_d e cifra di rumore F. Calcolare il rapporto segnale/rumore, cioè il rapporto tra la potenza disponibile di segnale e la potenza disponibile di rumore, all'uscita del sistema.



Esercizio 2.2

Calcolare il valore efficace della componente di rumore della tensione $v(t)$ all'uscita di un doppio bipolo a banda larga di cui sono noti l'andamento della temperatura equivalente di rumore in funzione della frequenza,

$$T_e(f) \;=\; \frac{T_0}{1+(f/B_T)^2}$$

e il guadagno disponibile del doppio bipolo,

$$g_d(f) \;=\; \frac{g_0}{2\pi[1+(f/B)^2]}\;.$$

Si suppone che all'ingresso del doppio bipolo sia presente un generatore di segnale con resistenza interna R_g alla temperatura T_s e che il doppio bipolo presenti un carico adattato alla sorgente.

Esercizio 2.3

Un metodo di misura della cifra di rumore di un doppio bipolo consiste in:

1. Connettere un resistore a temperatura ambiente T_0 all'ingresso del doppio bipolo.
2. Misurare la potenza P in uscita.
3. Scaldare il resistore finché la potenza letta all'uscita del doppio bipolo non risulta pari a $2P$.
4. Rilevare la temperatura T_R (in gradi Kelvin) del resistore in questa condizione.

La resistenza in ingresso e il potenziometro in uscita sono adattati d'impedenza al doppio bipolo. Dimostrare che la cifra di rumore è data da

$$F = \frac{T_R}{T_0} - 1.$$

(Si noti che non è necessario conoscere il guadagno disponibile e la banda equivalente di rumore del doppio bipolo.)

Esercizio 2.4

Si consideri un sistema di comunicazione costituito da sorgente, linea di trasmissione, utente. Poiché l'attenuazione L della linea è molto elevata, la si suddivide in n tratte uguali, ciascuna seguita da un amplificatore con guadagno pari all'attenuazione introdotta dalla singola tratta, in modo che il guadagno complessivo della linea-amplificatore per ogni tratta sia unitario. Calcolare il valore di n che minimizza la temperatura equivalente di rumore del sistema totale.

Applicare il risultato al caso di un collegamento lungo 60 km effettuato con un cavo coassiale che presenta un'attenuazione di 0.44 dB/km alla frequenza di 5 MHz supponendo che la temperatura di rumore degli amplificatori sia molto maggiore della temperatura fisica della linea.

Esercizio 2.5

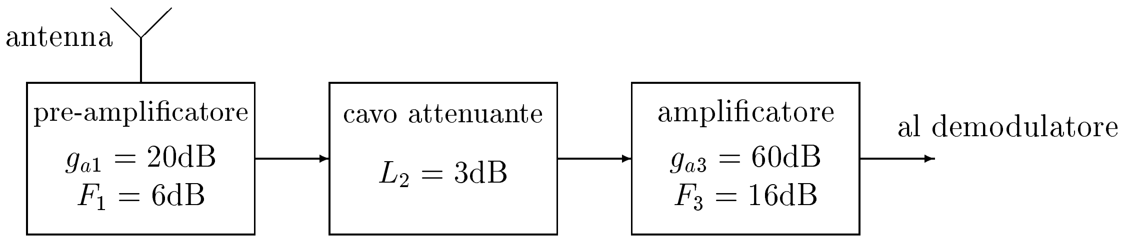
Si consideri un collegamento tra satellite stazionario e terra ($d = 36000$ km), alla frequenza di 4 GHz. I dati sono i seguenti:

$$\begin{cases} P_T &= 10 \text{ W} & \text{potenza del trasmettitore} \\ g_T &= 6 \text{ dB} & \text{guadagno dell'antenna di bordo} \\ T_A &= 5 \text{ K} & \text{temperatura di rumore dell'antenna di ricezione} \\ T_1 &= 50 \text{ K} & \text{temperatura equivalente del primo stadio del ricevitore} \\ g_1 &= 20 \text{ dB} & \text{guadagno del primo stadio del ricevitore} \\ T_2 &= 300 \text{ K} & \text{temperatura dei rimanenti stadi del ricevitore} \\ B &= 50 \text{ MHz} & \text{banda del segnale trasmesso} \end{cases}$$

Si ricavi il guadagno dell'antenna ricevente per assicurare un rapporto S/N di 10 dB.

Esercizio 2.6

Nei ricevitori TV, l'antenna è collegata al ricevitore con un cavo attenuante posto alla temperatura $T_L = T_0$. Per limitare gli effetti del rumore, si monta un preamplificatore subito dopo l'antenna, come nello schema riportato in figura. Calcolare la cifra di rumore complessiva del sistema. Trovare la cifra di rumore complessiva nel caso in cui il preamplificatore non ci sia e il guadagno dell'amplificatore del ricevitore sia aumentato di 20 dB (si supponga che la cifra di rumore dell'amplificatore non cambi e resti pari a 16 dB).



Esercizio 2.7

Un segnale con banda 10 kHz deve essere trasmesso ad una distanza di 100 km attraverso una linea con attenuazione 2 dB/km (si assuma la linea a temperatura $T_0 = 290$ K). La densità spettrale di potenza di rumore è $N_0/2 = 8 \cdot 10^{-21}$ W/Hz.

Determinare la potenza trasmessa P_t necessaria per avere un rapporto segnale-rumore $(S/N)_o = 30$ dB all'uscita dell'amplificatore del ricevitore che ha cifra di rumore $F_a = 4$ dB.

Ripetere il calcolo nel caso si inserisca un ripetitore non rigenerativo (un amplificatore) ogni 10 km. Gli amplificatori hanno guadagno uguale all'attenuazione della tratta lunga 10 km, cifra di rumore $F_a = 4$ dB e banda equivalente di rumore uguale alla banda del segnale.

Esercizio 2.8

Una linea telefonica lunga 200 km ha una perdita di 2 dB/km ed una banda di 4 kHz. Determinare il numero di ripetitori non rigenerativi che si possono inserire dato che ciascun ripetitore ha guadagno 20 dB, cifra di rumore 6 dB e richiede un livello del segnale di ingresso di 10 dBm. Si supponga che la linea sia ad una temperatura $T = T_0 = 290$ K.

Esercizio 2.9

Un amplificatore ha funzione di trasferimento $H(f) = H_0/(1+jf/f_0)^2$ con $20\log_{10}(H_0) =$ 30 dB e $f_0 = 10$ kHz. La potenza di rumore in uscita vale $10^8 kT_0$. Determinare la sua temperatura equivalente di rumore e la sua cifra di rumore.

Esercizio 2.10

Una antenna parabolica puntata verso il cielo ha una temperatura di rumore di 50 K. L'antenna è posta in cascata con un preamplificatore con guadagno 30 dB su una banda di 12 MHz con cifra di rumore di 2 dB.

Determinare la temperatura equivalente di rumore all'ingresso del preamplificatore. Inoltre, determinare la potenza di rumore all'uscita del preamplificatore.

Capitolo 3

Teoria dell'informazione

Esercizio 3.1

Si consideri la funzione entropia definita come:

$$\begin{cases} H(p) & = \; p\log_2 \dfrac{1}{p} + (1-p)\log_2 \dfrac{1}{1-p} & \text{con un solo argomento, } p \\ H(p_1,\cdots,p_n) & = \; \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \dfrac{1}{p_i} & \text{con più argomenti } p_i > 0 \; e \; \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$

Si dimostrino le seguenti proprietà:

1. La funzione $H(\boldsymbol{p}) = H(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ è simmetrica negli argomenti.
2. Posto $\boldsymbol{p} = (p_1,\cdots,p_n)$, $\boldsymbol{q} = (q_1,\cdots,q_m)$, $\boldsymbol{p}' = (\overline{p},\cdots,\overline{p})$ con $\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=1}^{m} q_j = 1$, e $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$, vale la proprietà
$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \;\leq\; H(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}) \; .$$
3. Valgono le disuguaglianze
$$0 \leq H(\boldsymbol{p}) \leq \log_2 n \; , \quad \text{dove } \boldsymbol{p} = (p_1,\cdots,p_n) \; .$$
4. La funzione $H(\boldsymbol{p})$ è convessa giù in $\boldsymbol{p}$, ovvero:
$$H(\alpha\boldsymbol{p} + (1-\alpha)\boldsymbol{q}) \;\geq\; \alpha H(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha)H(\boldsymbol{q})$$
per $0 \leq \alpha \leq 1$.

Esercizio 3.2

Una sorgente emette simboli statisticamente indipendenti presi dall'alfabeto

$$\mathcal{A} = \{x_1, x_2\}$$

con $\text{Prob}\{X = x_1\} = p$ e $\text{Prob}\{X = x_2\} = q = 1 - p$.
Si consideri la sorgente X^2 che emette simboli ottenuti dalla giustapposizione di due simboli di $\mathcal{A}$, ciascuno con le probabilità precedenti.

1. Dimostrare che $H(X^2) = 2H(X)$.
2. Estendere il risultato al caso di una sorgente con alfabeto X^n.

Esercizio 3.3

Una sorgente ha alfabeto $X = \{x_1, x_2\}$, con $P\{x_1\} = 0.1$ e $P\{x_2\} = 0.9$.

1. Si costruiscano i codici di Huffman corrispondenti agli alfabeti X^n, $n = 1,2,3,4$.
2. Per ogni n si determini la lunghezza media della parola di codice per bit codificato.

Esercizio 3.4

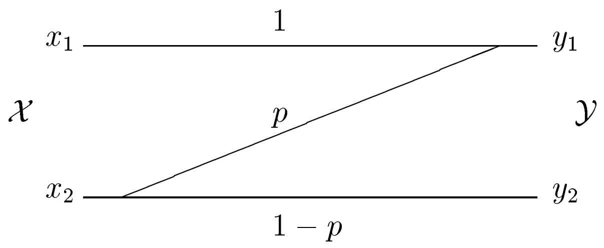
Una sorgente binaria ha alfabeto $X = \{x_1, x_2\}$ con $P\{x_1\} = 0.005$. Le uscite della sorgente sono raggruppate in blocchi di 100 elementi ciascuno, e si associa una parola di codice a quei blocchi che contengono non più di 3 simboli x_1. Ipotizzando che i simboli della sorgente siano statisticamente indipendenti:

1. Determinare la lunghezza minima delle parole di codice nel caso di codici a lunghezza fissa.
2. Determinare la probabilità che un blocco non sia codificato.

Esercizio 3.5

Si consideri il canale a due ingressi e due uscite rappresentato in figura.

1. Si calcoli la capacità del canale.
2. Si calcoli la capacità, C_n, del canale equivalente ottenuto ponendo in cascata n canali di questo tipo.
3. Si calcoli il limite per $n \to \infty$ di C_n assumendo $p > 0$ e si interpreti il risultato ottenuto.



Esercizio 3.6

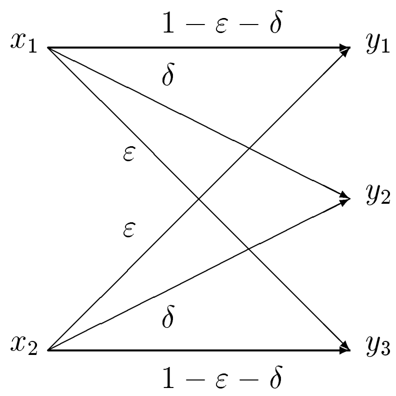
Due canali binari simmetrici con probabilità di errore p e p' sono connessi in cascata. Si dimostri che la capacità del canale equivalente non può superare la capacità di ogni singolo canale.

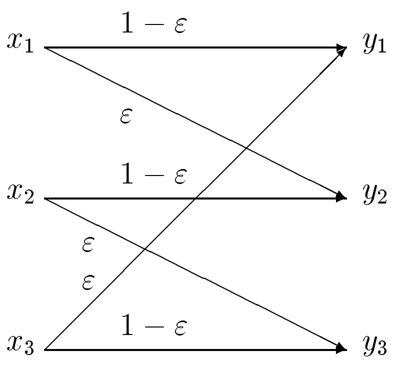
Esercizio 3.7

Si dimostri che la cascata di n canali binari simmetrici è ancora un canale binario simmetrico. Nell'ipotesi che gli n canali siano uguali, si determini la matrice di canale e la probabilità di errore del canale equivalente per $n \to \infty$.

Esercizio 3.8

Si determini la capacità dei canali descritti in figura.





Esercizio 3.9

Si consideri un sistema di trasmissione cosí composto:

1. Sorgente binaria con alfabeto $X = \{x_1,x_2\}$.
2. Modulatore che associa al simbolo x_1 una tensione pari a 1V e al simbolo x_2 una tensione pari a -1V
3. Canale gaussiano additivo con campioni di rumore a valor medio nullo, varianza unitaria e statisticamente indipendenti.
4. Dispositivo di decisione basato sul campione ricevuto r che opera secondo una delle seguenti regole:
   (a) se $r > 0$, decide che è stato trasmesso x_1, altrimenti decide per x_2
   (b) se $r > \delta$, decide per x_1, se $r < -\delta$ decide per x_2, altrimenti emette il simbolo x_E detto di cancellazione ($\delta > 0$)

Si determini la capacità dei due canali discreti ottenuti dall'applicazione delle due regole di decisione sopra esposte. Si diagrammi la capacità con la seconda regola in funzione di δ.

Esercizio 3.10

Si consideri un canale discreto a 4 ingressi e 5 uscite definito nel modo seguente:

- ☐ i simboli di ingresso X sono le 4 possibili coppie di bit ($x_0 = 00$,$x_1 = 01$,$x_2 = 10$,$x_3 = 11$);
- ☐ gli ingressi sono *codificati* aggiungendovi un bit di parità secondo la regola: $00 \rightarrow 000$, $01 \rightarrow 011$, $10 \rightarrow 101$, $11 \rightarrow 110$;
- ☐ le triplette cosí formate sono quindi trasmesse su tre canali binari simmetrici con probabilità di errore p;
- ☐ le triplette in uscita sono quindi *decodificate* secondo la regola seguente: $000 \rightarrow 00$, $011 \rightarrow 01$, $101 \rightarrow 10$, $110 \rightarrow 11$ e le rimanenti triplette sono decodificate come simbolo di *cancellatura* x_E; in questo modo il canale discreto dà in uscita 5 simboli: x_0,x_1,x_2,x_3 e il simbolo di cancellatura x_E.

1. Determinare la matrice delle probabilità di transizione del canale P.
2. Dimostrare che la capacità del canale si ottiene per simboli di ingresso equiprobabili.
3. Determinare la capacità del canale in funzione di p.
4. Determinare la capacità del canale per $p = 0$.

Esercizio 3.11

Una sorgente genera messaggi costituiti da stringhe di lunghezza variabile, L, di caratteri presi dall'alfabeto ordinario di 26 simboli in modo statisticamente indipendente e con probabilità di scelta uniforme. L è una variabile casuale con distribuzione di probabilità

$$P\{L = n\} = \beta n\, e^{-\alpha n}, \quad n = 1,2,\ldots$$

1. Sapendo che $\mu_L = E[L] = 5$, determinare α e β.
2. Calcolare l'entropia della sorgente.
3. Verificare che il risultato ottenuto al punto 2 è la somma di due termini: interpretare il significato di ciascuno di essi.

Esercizio 3.12

Si consideri un canale discreto privo di memoria $\mathcal{C}$ a M ingressi e $2N$ uscite ottenuto nel modo seguente:

1. L'ingresso X è mandato a due canali $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ *simmetrici* a M ingressi e N uscite, con matrici di probabilità di transizione P e Q, rispettivamente.
2. L'uscita è presa scegliendo in modo casuale tra le uscite Y_1 e Y_2 di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e

$$\text{Prob}\{Y = Y_1\} \;=\; p \qquad\qquad \text{Prob}\{Y = Y_2\} \;=\; q \qquad\qquad p + q = 1 \;.$$

Si dimostri che la capacità di $\mathcal{C}$ è

$$C \;=\; pC_1 + qC_2 \;,$$

dove C_1 e C_2 sono le capacità di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, rispettivamente.

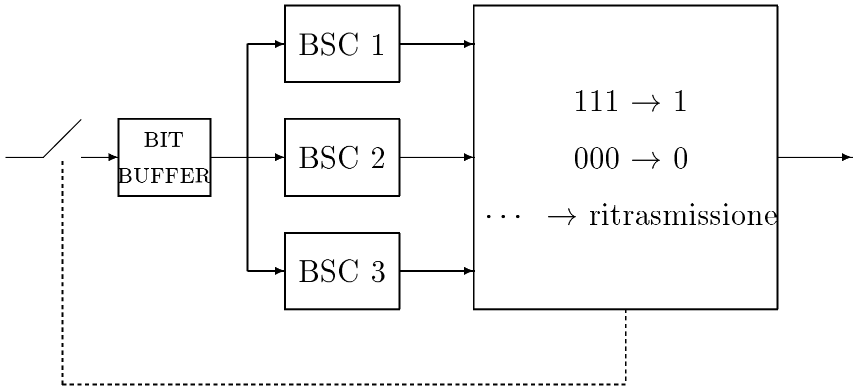
Esercizio 3.13

Si consideri un canale binario in cui il bit trasmesso è mandato a tre canali binari simmetrici indipendenti aventi probabilità di errore p e l'uscita è determinata secondo la regola seguente:

- □ se si ricevono tre bit uguali (0 o 1) è messo in uscita il bit ricevuto;
- □ altrimenti è richiesta una nuova trasmissione (dello stesso bit trasmesso in precedenza).

Si determini la capacità di questo canale in due modi:

1. osservando che esso è equivalente a un canale binario simmetrico con opportuna probabilità di errore;
2. considerando il modello di canale a due ingressi e infinite uscite che si ottiene prendendo come ingressi i bit 0 e 1 e come uscite i bit 0 e 1 alla prima trasmissione, alla seconda trasmissione e cosí via.



Esercizio 3.14

Le variabili casuali $X \in \{1,2,3,4\}$ e $Y \in \{1,2,3,4\}$ hanno distribuzione congiunta data dalla tabella 3.1. Calcolare $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X|Y)$, $I(X;Y)$.

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = 1$	3.391e-2	1.447e-1	5.354e-3	1.192e-3
$Y = 2$	7.285e-3	5.939e-2	8.279e-3	5.937e-2
$Y = 3$	1.051e-1	8.044e-2	8.203e-2	1.035e-2
$Y = 4$	1.052e-1	1.286e-1	1.039e-1	6.465e-2

Tabella 3.1 Valori di $P(X,Y)$.

Esercizio 3.15

Le variabili casuali X_n, $n = 1,2,\ldots,N$ e Y hanno distribuzione di probabilità congiunta $P(X_1,X_2,\ldots,X_N,Y)$ con distribuzioni marginali $P(X_n)$ e $P(Y)$. Dimostrare le seguenti identità:

$$H(X_1,\ldots,X_N) = \sum_{n=1}^{N} H(X_n|X_{n-1},\ldots,X_1)$$

$$I(X_1,\ldots,X_N;Y) = \sum_{n=1}^{N} I(X_n;Y|X_{n-1},\ldots,X_1)$$

dove, se $n = 1$, l'insieme $\{X_{n-1},\ldots,X_1\}$ è l'insieme vuoto. *Nota: definiamo la mutua informazione condizionata di X e Y dato Z come*

$$I(X;Y|Z) = E\left[\log_2 \frac{P(X,Y|Z)}{P(X|Z)P(Y|Z)}\right]$$

dove $P(X,Y|Z)$, $P(X|Z)$ e $P(Y|Z)$ sono le distribuzioni di probabilità di (X,Y), di X e di Y dato Z.

Esercizio 3.16

Dimostrare le seguenti diseguaglianze:

$$\begin{aligned} H(X,Y|Z) &\geq H(X|Z) \\ I(X,Y;Z) &\geq I(X;Z) \\ H(X,Y,Z) - H(X,Y) &\leq H(X,Z) - H(X) \\ I(X;Z|Y) &\geq I(Z;Y|X) - I(Z;Y) + I(X;Z) \end{aligned}$$

Esercizio 3.17

Nella finale di coppa Davis vince la squadra che totalizza tre vittorie su cinque incontri. Siano A e B le due squadre e X la variabile casuale che indica la sequenza di risultati (supponiamo che la finale finisca quando una delle due squadre ha totalizzato tre vittorie, cioè non contiamo gli incontri irrilevanti per il risultato finale). Possibili valori di X sono, per esempio, AAA, $BAAA$, $ABABA$, $BABAA$ etc... Sia Y la variabile casuale che indica la lunghezza della stringa X e si assuma che le squadre A e B abbiano eguale probabilità di vincere ciascun incontro e che gli incontri siano statisticamente indipendenti. Calcolare $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$ e $H(Y|X)$.

Esercizio 3.18

Siano $X_1 \in \{1,\ldots,m\}$ e $X_2 \in \{m+1,\ldots,n\}$ due variabili casuali indipendenti con distribuzioni $P_1(x)$ e $P_2(x)$. Sia Y la variabile casuale definita da

$$Y = \begin{cases} X_1 & \text{con probabilità } \alpha \\ X_2 & \text{con probabilità } 1-\alpha \end{cases}$$

Determinare l'espressione di $H(Y)$ in termini di α, $H(X_1)$ e $H(X_2)$. Massimizzare l'espressione trovata rispetto ad $\alpha \in [0,1]$ e dimostrare la diseguaglianza

$$2^{H(Y)} \leq 2^{H(X_1)} + 2^{H(X_2)}$$

Esercizio 3.19

Determinare il numero di bit al secondo che si possono teoricamente trasmettere con probabilità di errore piccola a piacere su un canale Gaussiano additivo con banda $W = 20$ kHz e densità spettrale di rumore $N_0/2 = 10^{-6}$ W/Hz, con una potenza media di segnale di $P = 1$ W. *Suggerimento: usate il teorema del campionamento: quanti simboli al secondo potete trasmettere usando un segnale con banda W? Una volta risposto a questa domanda pensate a come utilizzare la formula della capacità del canale Gaussiano bianco additivo $C = \frac{1}{2}\log_2(1 + S/N)$).*

Esercizio 3.20

Una sorgente stazionaria emette stringhe binarie di lunghezza fissa $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ con $N = 24$ e $P(X_i = \text{`0`}) = p = 0.06, i = 1,2,\ldots,N$. Un algoritmo di compressione opera nel seguente modo:

1. le stringhe sono divise in due classi: la prima classe, $\mathcal{S}_1$ contiene le stringhe con un numero di '0' compreso tra 0 e t; la seconda classe, $\mathcal{S}_2$ contiene le stringhe con un numero di '0' compreso tra $t+1$ e N.
2. Le stringhe all'interno di una stessa classe sono codificate a lunghezza fissa.
3. Le stringhe codificate contengono un bit che indica la classe di appartenenza e altri bit che identificano la stringa data la classe di appartenenza.

Determinare il valore ottimo di t che minimizza il numero medio di bit per stringa codificata. Inoltre, determinare l'efficienza di codifica di sorgente in corrispondenza del valore ottimo di t trovato nella domanda precedente.

Capitolo 4

Modulazioni analogiche

Esercizio 4.1

Siano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ i segnali (deterministici a energia finita) corrispondenti al canale destro e sinistro di un sistema stereofonico. Essi vengono trasmessi modulando in SSB la stessa portante a frequenza f_0; in particolare, per $x_1(t)$ si usa lo schema SSB/USB, mentre per $x_2(t)$ si usa lo schema SSB/LSB. Si dimostri che questo schema di trasmissione è *compatibile* con un demodulatore di tipo coerente; si dimostri cioè che un ricevitore coerente al cui ingresso sia applicato il segnale modulato produce all'uscita il segnale somma $x_s(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Esercizio 4.2

Si consideri un segnale modulato di ampiezza con soppressione di portante:

$$r(t) = x(t) \cos 2\pi f_0 t$$

con $x(t)$ a valor medio nullo. Per la demodulazione coerente di $r(t)$ è necessario costruire un segnale di riferimento isofrequenziale ed in fase con la portante; ciò è ottenuto inviando $r(t)$ all'ingresso di un elemento quadratico che fornisce all'uscita il segnale:

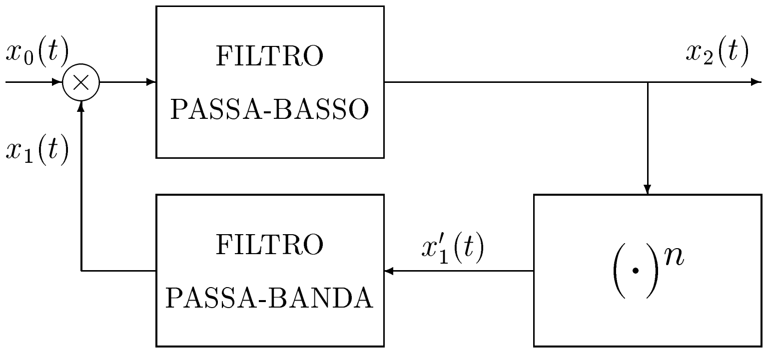
$$z(t) = r^2(t),$$

$z(t)$ viene posto all'ingresso di un filtro passabanda centrato in $2f_0$, che elimina la parte di spettro in banda base e produce il segnale $y(t)$.

1. Dimostrare che in $y(t)$ è presente una portante a frequenza $2f_0$ in quanto $y(t)$ può essere interpretato come un segnale modulato di inviluppo.
2. Nell'ipotesi che $x(t)$ sia gaussiano, valutare l'indice di modulazione efficace di ampiezza di $y(t)$, definito come il rapporto tra la potenza delle bande laterali e la potenza della portante.

Esercizio 4.3

Un divisore di frequenza può essere realizzato con lo schema di figura:



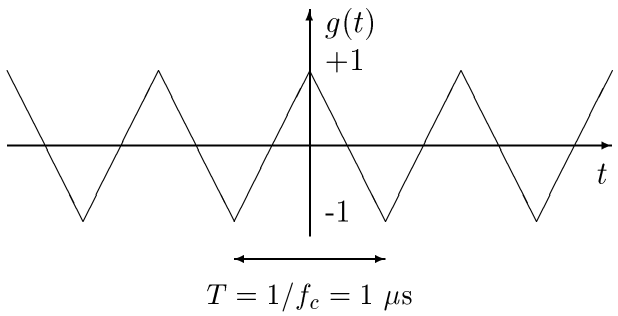
all'ingresso è presente il segnale $x_0(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ e all'uscita si desidera un segnale $x_2(t)$ proporzionale a $\cos(2\pi f_0 t/m)$. Stabilire il valore del parametro n.

N.B. I filtri hanno funzione di trasferimento unitaria nella banda passante e il filtro passabanda che segue la nonlinearità di ordine n lascia passare solamente l'n-esima armonica.

Esercizio 4.4

Un segnale modulato in ampiezza può essere ottenuto moltiplicando il segnale modulante $x(t)$ per un segnale periodico $g(t)$, non necessariamente sinusoidale, e filtrando il segnale risultante con un filtro passabanda.

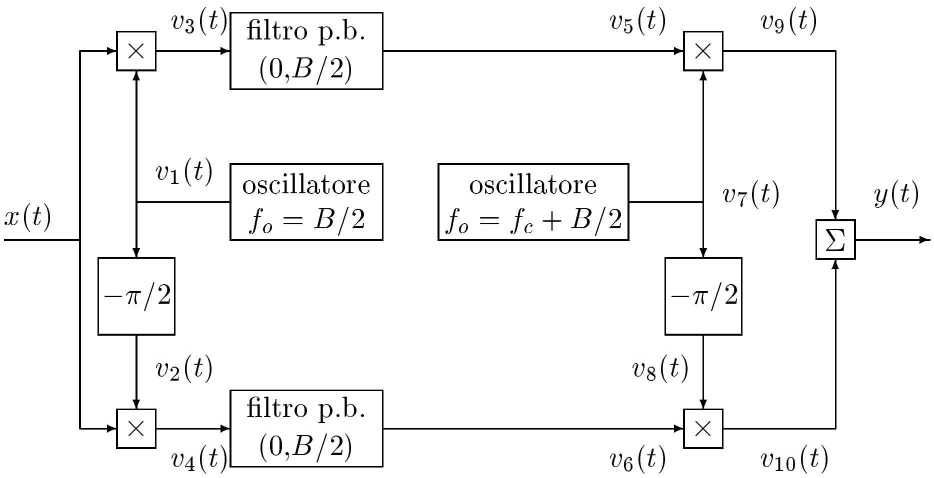
1. Verificare l'asserto dimostrando che questo modulatore funziona se il filtro passabanda è centrato alla frequenza f_c ed ha banda passante $2B$, essendo B la banda di $x(t)$.
2. Scrivere l'espressione del segnale modulato nel caso di segnale in ingresso $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = 500$ Hz e $g(t)$ indicato in figura.



Commento: questo esercizio verifica come sia possibile realizzare un modulatore AM anche se la forma d'onda della portante utilizzata non è esattamente sinusoidale.

Esercizio 4.5

Il metodo di Weaver per la modulazione SSB-AM è descritto dallo schema a blocchi riportato in figura:



Assumendo che $x(t)$ sia un segnale deterministico ad energia finita con banda $B/2$ e che

$$\begin{cases} v_1(t) &= \cos\ [2\pi(B/2)t] \\ v_7(t) &= \cos\ [2\pi(f_c + B/2)t] \end{cases}$$

si calcoli l'espressione dei segnali $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$, $v_4(t)$, $v_5(t)$, $v_6(t)$, $v_7(t)$, $v_8(t)$ e si verifichi che l'uscita $y(t)$ è un segnale modulato SSB-AM con frequenza centrale f_c. Si verifichi se la modulazione è di tipo LSB o USB.

Esercizio 4.6

Si consideri un sistema di trasmissione che utilizza una modulazione di ampiezza alla frequenza centrale f_0 con soppressione di portante. Si supponga che il ricevitore coerente operi con recupero ideale di portante. Il segnale trasmesso, prima del filtro di trasmissione, ha spettro di potenza costante G_0 e banda B. Il canale di trasmissione con funzione di trasferimento unitaria è affetto da rumore gaussiano bianco additivo con densità spettrale di potenza $N_0/2$ sulla banda B. In trasmissione e in ricezione si utilizzano filtri passa-banda uguali, la cui funzione di trasferimento equivalente in banda base è

$$H(f) = \frac{1}{1 + jf/W} .$$

1. Determinare il rapporto segnale/rumore dopo il demodulatore coerente in funzione di $\rho = W/B$.
2. Approssimare il risultato mediante sviluppo in serie asintotico per $\rho \to \infty$ con almeno due termini $(a + b/\rho^2 + \ldots)$.

Esercizio 4.7

Un segnale audio $x(t)$ deve essere trasmesso su un canale RF. Si desidera un rapporto segnale rumore in ricezione maggiore di 50 dB. Le caratteristiche del canale sono: attenuazione sul canale pari a 50 dB, densità spettrale di potenza di rumore $N_0/2 = 10^{-12}$ W/Hz. Le caratteristiche del segnale sono: valor medio nullo, potenza 0.5 W, valore massimo del segnale 1 V, occupazione di banda 15 kHz.

Calcolare la banda e la potenza del segnale modulato necessarie per soddisfare le specifiche nei seguenti casi:

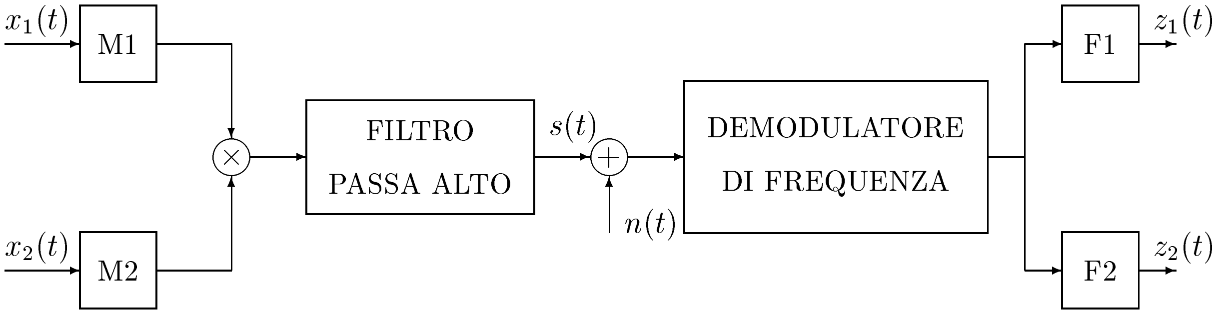
1. modulazione DSB-AM con soppressione di portante;
2. modulazione AM con indice di modulazione $m = 1$ W$^{-1/2}$;
3. modulazione FM con rapporto di deviazione (rapporto tra la massima deviazione di frequenza e la banda del segnale modulante) $D = 5$.

Esercizio 4.8

Un segnale sinusoidale alla frequenza di 100kHz è inviato ad un modulatore di frequenza. Osservando lo spettro di potenza del segnale modulato su un analizzatore di spettro si vede che, aumentando progressivamente il valore efficace del segnale modulante, si ottiene l'annullamento della riga della portante per un valore di 0.2V efficaci. Determinare la sensibilità del modulatore, cioè la costante di proporzionalità tra scostamento istantaneo di frequenza e valore istantaneo del segnale modulante, espressa in MHz/V.

Esercizio 4.9

Si consideri il sistema di trasmissione indicato in figura:



I segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ hanno spettro di potenza:

$$G_{x1}(f) = \begin{cases} G_1 \quad f_{l1} = 60 \text{ kHz} \ < |f| < f_{u1} = 108 \text{ kHz} \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{altrove} \end{cases}$$

e

$$G_{x2}(f) = \begin{cases} G_2 \quad f_{l2} = 12 \text{ kHz} \ < |f| < f_{u2} = 24 \text{ kHz} \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{altrove} \end{cases}$$

M1 è il modulatore di frequenza principale, caratterizzato da una deviazione efficace di frequenza Δf_1.

M2 è un modulatore ausiliario, con deviazione efficace di frequenza Δf_2, che consente l'inserzione del segnale $x_2(t)$.

I modulatori hanno la stessa frequenza centrale $f_0 = 100$ MHz e il filtro passa alto ha frequenza di taglio sufficientemente elevata rispetto alla banda occupata dai segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ modulati in frequenza.

F1 e F2 sono, rispettivamente, un filtro passa-alto e un filtro passa-basso, con frequenza di taglio pari a 40 kHz, che consentono la separazione dei due segnali $z_1(t)$ e $z_2(t)$.

1. Verificare che, in assenza di rumore, $z_1(t)$ e $z_2(t)$ riproducono fedelmente $x_1(t)$ e $x_2(t)$, rispettivamente.
2. Si assuma che il segnale $s(t)$ presenti una deviazione efficace di frequenza complessiva $\Delta f = 1$ MHz; determinare i valori Δf_1 e Δf_2 in modo tale che i rapporti segnale/rumore alle due uscite $z_1(t)$ e $z_2(t)$ siano uguali (si supponga che F1 e F2 siano filtri passa-banda ideali che non distorcano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e che limitino al massimo la potenza di rumore).
3. Determinare il rapporto segnale rumore all'uscita con i valori di Δf_1 e Δf_2 calcolati precedentemente, nell'ipotesi che all'ingresso del demodulatore il rapporto tra la potenza del segnale modulato e la potenza di rumore misurata su una banda $W = 4$ kHz sia pari a 30dB.

N.B. Si assuma che $x_1(t)$ e $x_2(t)$ siano statisticamente indipendenti e che il demodulatore sia sempre sopra soglia. Si ricorda che la deviazione efficace di frequenza è definita dalla relazione

$$(\Delta f)^2 = E\{\nu^2(t)\}$$

essendo $\nu(t)$ la deviazione di frequenza istantanea del segnale modulato.

Esercizio 4.10

Si consideri un sistema di modulazione lineare definito dalla relazione:

$$y(t) \;=\; A\left[\cos(2\pi f_0 t) \;-\; 2\pi\sin(2\pi f_0 t)\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] \;.$$

Tale sistema approssima un modulatore di frequenza se la potenza di $x(t)$ è sufficientemente piccola.
Assumendo che $x(t)$ sia un processo casuale gaussiano con spettro di potenza

$$G_x(f) = \begin{cases} G_0 & F/10 < |f| < F \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

determinare

1. la fase istantanea $\varphi(t)$ e la frequenza istantanea $\nu(t)$ di $y(t)$;
2. l'espressione della deviazione efficace di frequenza $m_\nu^2 = E\{\nu^2(t)\}$.

N.B. Si supponga che il processo casuale $x_1(t) = 2\pi\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\; d\tau$ assuma valori molto piccoli rispetto a 1, in modo da poter approssimare $\tan^{-1}(x_1) \cong x_1 - x_1^3/3$.

Esercizio 4.11

Si consideri un segnale modulato angolarmente del tipo

$$\overset{\circ}{z}(t) \;=\; \exp\left\{j[2\pi f_0 t + \varphi(t)]\right\} \;.$$

Si dimostri che il momento secondo normalizzato dello spettro di potenza del segnale modulato, definito come

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(f-f_0)^2 G_{\overset{\circ}{z}}(f)df}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G_{\overset{\circ}{z}}(f)df} \;,$$

è uguale al quadrato della deviazione efficace di frequenza.

Esercizio 4.12

Si consideri un sistema di trasmissione in banda base su canale con funzione di trasferimento unitaria sulla banda $(-B,B)$ e zero altrove. Il canale aggiunge rumore al segnale trasmesso. Le densità spettrali di potenza del segnale $x(t)$ e del rumore $n(t)$

sono, rispettivamente:

$$G_x(f) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_x^2}{2B} & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases} \qquad G_n(f) = \begin{cases} \dfrac{3\sigma_n^2}{2B^3} f^2 & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

Determinare il rapporto segnale/rumore in uscita nei due casi seguenti:

1. Il filtro di ricezione è solo un filtro passabasso ideale con banda passante B.
2. Si utilizzano i filtri ottimi di enfasi e deenfasi che rendono massimo il rapporto segnale/rumore in ricezione senza distorcere il segnale ricevuto.

   Confrontare questo risultato con il precedente supponendo che la potenza trasmessa sul canale sia invariata.

Esercizio 4.13

Si consideri un sistema di trasmissione in banda base costituito da un canale con funzione di trasferimento unitaria sulla banda $(-B,B)$ e zero altrove che aggiunge rumore al segnale trasmesso. Le densità spettrali di potenza del segnale $x(t)$ e del rumore $n(t)$ sono

$$G_x(f) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_x^2}{2B} & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases} \qquad G_n(f) = \begin{cases} \dfrac{3\sigma_n^2}{2B^3} f^2 & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

Il rapporto segnale/rumore in uscita del sistema è σ_x^2/σ_n^2. Si inseriscano nel sistema un filtro di trasmissione $H_T(f)$ e un filtro di ricezione $H_R(f)$ definiti dalle relazioni:

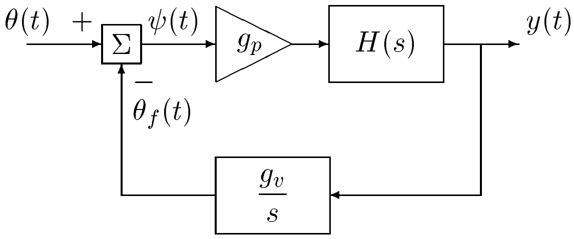
$$H_R(f) \ = \ \frac{H_0}{1 + jf/W} \qquad\qquad H_T(f) \cdot H_R(f) \ = \ 1 \ .$$

Con le ipotesi fatte si determini quanto segue:

1. La costante positiva H_0 che rende la potenza trasmessa (dopo il filtro di trasmissione) uguale a quella che si ha in assenza del filtro, ovvero σ_x^2.
2. La potenza di segnale dopo il filtro di ricezione.
3. La potenza di rumore dopo il filtro di ricezione.
4. La banda a 3 dB del filtro di ricezione, W, che rende minima la potenza di rumore trovata al punto precedente sapendo che $0 < W < B$.
5. Il guadagno in dB nel rapporto segnale/rumore in ricezione.

Esercizio 4.14

Si consideri il modello linearizzato del PLL (*phase-locked loop*) indicato in figura.



Si considerano due tipi di funzione di trasferimento $H(s)$:

$$H(s) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{PLL del primo ordine} \\ \dfrac{1+s\tau_1}{s\tau_2} & \text{PLL del secondo ordine} \end{cases}$$

1. Calcolare le funzioni di trasferimento

$$\begin{cases} H_1(s) = \dfrac{Y(s)}{\Theta(s)} \\ H_2(s) = \dfrac{\Psi(s)}{\Theta(s)} \end{cases}$$

per i PLL del primo e del secondo ordine.

2. Si supponga che il segnale di ingresso abbia fase istantanea

$$\theta(t) = (2\pi\Delta f\; t + \Delta\theta)u(t).$$

Utilizzare il teorema del valore finale per calcolare

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to\infty} \psi(t)$$

per i PLL del primo e del secondo ordine.

Esercizio 4.15

Si consideri un segnale $x(t) = A(t)\cos[\theta(t)]$, dove $A(t)$ è un segnale spurio da eliminare che assume solo valori positivi. Quindi, $x(t)$ è posto all'ingresso di un limitatore ideale che opera secondo la seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(t) \;=\; a\ \mathrm{sign}[x(t)]\ .$$

Il segnale di uscita dal limitatore, $y(t)$, è periodico rispetto a $\theta(t)$ con periodo 2π.

- ☐ Determinare $y(\theta)$.
- ☐ Dimostrare che

$$y(\theta) = \frac{4a}{\pi}\left[\cos\theta - \frac{1}{3}\cos(3\theta) + \frac{1}{5}\cos(5\theta) - \ldots\right]$$

□ Dimostrare che, filtrando $y(\theta)$ con un opportuno filtro passabanda, è possibile ottenere in uscita dal filtro un segnale

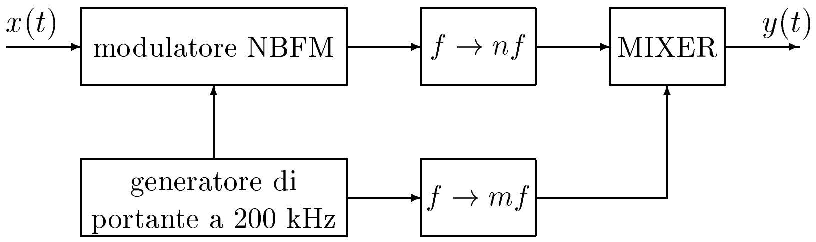
$$z(t) = \frac{4a}{\pi}\cos[\theta(t)],$$

cioè un segnale modulato d'angolo.
Assumere che sia $\theta(t) = 2\pi f_c t + \varphi(t)$ e $\max_t |d\varphi(t)/dt| \ll 2\pi f_c$.

Commento: questo schema consente di ottenere un segnale modulato in frequenza a inviluppo costante a partire da un segnale per cui l'inviluppo non è costante.

Esercizio 4.16

Lo schema funzionale di un modulatore FM di Armstrong è riportato in figura.



Un oscillatore alla frequenza 200 kHz genera la portante per la modulazione e per la conversione di frequenza.

Per evitare distorsioni si desidera mantenere la massima deviazione di fase del segnale NBFM (modulato in frequenza a banda stretta) entro 0.15 rad.

Il segnale $x(t)$ ha componenti di frequenza nell'intervallo 30 Hz - 15 kHz. L'uscita del modulatore deve avere la frequenza di portante pari a 108 MHz e deviazione massima di frequenza di 90 kHz.

□ Scegliere i parametri dei moltiplicatori di frequenza, in modo da soddisfare le specifiche.

□ Se l'oscillatore genera la portante a frequenza 200 kHz ± 0.1 Hz, di quanto può variare la frequenza della portante del segnale d'uscita?

□ Se il segnale d'uscita deve avere la frequenza della portante a 108 MHz ± 1 Hz, di quanto può variare la frequenza dell'oscillatore a 200 kHz?

Esercizio 4.17

Determinare e rappresentare graficamente gli spettri delle modulazioni AM, DSB, USSB e LSSB quando il segnale di messaggio è $x(t) = \operatorname{sinc}(t) + \operatorname{sinc}(t)^2$ e la portante è $A\cos(2\pi f_c t)$. Nel caso della modulazione AM l'indice di modulazione è $m = 1/2$.

Esercizio 4.18

Un segnale modulato AM è

$$s(t) = [10 + \cos(2\pi f_0 t) + 5\cos(4\pi f_0 t)]\cos(2\pi f_c t)$$

con $f_0 = 1$ kHz and $f_c = 10$ kHz. di $s(t)$.

- ☐ Disegnare lo spettro di ampiezza
- ☐ Disegnare lo spettro di potenza di $s(t)$.
- ☐ Determinare l'indice di modulazione.
- ☐ Determinare il rapporto fra la potenza delle bande laterali e la potenza totale del segnale, cioè l'efficienza di modulazione.

Esercizio 4.19

Determinare il massimo indice di modulazione m che non dia sovramodulazione quando il segnale modulante è $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) - 2\sin(4\pi f_0 t)$.

Esercizio 4.20

Trovare le espressioni (in generale) delle componenti in fase e in quadratura $s_c(t)$ e $s_s(t)$ di un segnale modulato $s(t)$ nei casi di modulazione AM, DSB, USSB, LSSB, PM e FM.

Esercizio 4.21

Dato il segnale $x(t)$ con banda W, il segnale modulato VSB $s(t)$ è ottenuto come

$$s(t) = [Ax(t)\cos(2\pi f_c t)] * h(t)$$

dove * indica il prodotto di convoluzione e dove $h(t)$ è la risposta all'impulso di un filtro passabanda con risposta in frequenza:

$$H(f) = \begin{cases} (|f| - f_c + W/2)/W & \text{for } f_c - W/2 \le |f| \le f_c + W/2 \\ 1 & \text{for } f_c + W/2 < |f| \le f_c + W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- □ Verificare che questo filtro soddisfa le condizioni di non distorsione per la ricostruzione di $x(t)$ ad opera del demodulatore.
- □ Determinare un'espressione nel dominio del tempo per il segnale modulato $s(t)$ e interpretare il risultato.

Esercizio 4.22

Un segnale FM è dato da

$$s(t) = 10\cos\left(2\pi f_c t + 10\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\,\tau\right)$$

dove $x(t)$ è il segnale periodico che vale 1 per $kT \leq t < kT + 2T/3$ e -1 per $kT + 2T/3 \leq t < kT + T$, con $k = \cdots, -1,0,1,2,\cdots$. Disegnare la frequenza istantanea in funzione del tempo. Determinare la deviazione di frequenza di picco.

Esercizio 4.23

Progettare un sistema FM che abbia un SNR al ricevitore di 40 dB e che richieda la minima possibile potenza trasmessa. La banda del canale è 100 kHz, la banda del segnale modulante è 10 kHz, la potenza normalizzata del segnale modulante è $P_{x'} = P_x/(\max\{|x|\})^2 = 1/2$ e la densità spettrale di rumore è $N_0/2 = 5 \times 10^{-9}$ W/Hz. Che potenza occorre trasmettere se il segnale viene attenuato dal canale di 10 dB?

Esercizio 4.24

In un sistema FM la banda del segnale modulante è $W = 20$ kHz, l'indice di modulazione vale $\beta = 5$ e la frequenza di taglio del filtro di deenfasi vale $f_0 = 2$ kHz. Assumendo che la potenza normalizzata del segnale modulante sia $1/2$, calcolare il guadagno di questo sistema rispetto ad un sistema DSB in termini di SNR all'uscita del ricevitore.

Esercizio 4.25

Un canale di comunicazione ha banda 100 kHz e viene usato per trasmettere un segnale $x(t)$ con $\max|x(t)| = 1$, potenza 0.1 W e banda $W = 4$ kHz. Determinare il rapporto, in dB, fra l'SNR all'uscita del demodulatore per una modulazione FM che utilizza tutta la banda del canale e l'SNR all'uscita del demodulatore per una modulazione AM con indice di modulazione $m = 0.85$.

Capitolo 5

Spettri di potenza di segnali modulati numericamente

Esercizio 5.1

Calcolare lo spettro di potenza (parte continua e a righe) del segnale

$$x(t) \ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \ s(t-nT) \ \cos(2\pi f_0 t) \ + \ \beta_n \ s(t-nT-T/2) \ \sin(2\pi f_0 t) \quad ,$$

dove $s(t)$ è dato dall'espressione

$$s(t) \ = \ \frac{4A}{T} \left[r(t) - 2r(t-T/4) + 2r(t-3T/4) - r(t-T) \right] \quad ,$$

in cui $r(t) \ = \ t\, u(t)$, $A > 0$ è l'ampiezza del segnale, T il periodo e $f_0 \gg \frac{1}{T}$.
Le variabili casuali α_n,β_n sono statisticamente indipendenti per valori diversi dell'indice n (ovvero α_n è indipendente sia da α_m che da β_m per ogni $n \neq m$ e la loro distribuzione di probabilità congiunta (per n fisso) è definita dalle seguenti probabilità:

$$\begin{cases} \text{Prob}\left\{\alpha_n = +1, \beta_n = +1\right\} & = \ \frac{1}{8} \\ \text{Prob}\left\{\alpha_n = -1, \beta_n = +1\right\} & = \ \frac{3}{8} \\ \text{Prob}\left\{\alpha_n = +1, \beta_n = -1\right\} & = \ \frac{1}{8} \\ \text{Prob}\left\{\alpha_n = -1, \beta_n = -1\right\} & = \ \frac{3}{8} \end{cases}$$

Esercizio 5.2

Si determini lo spettro di potenza del segnale

$$x(t) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ \sum_{j=0}^{2} \alpha_{n,j} \ s(t - jT/3 - nT)$$

dove $s(t)$ è un segnale avente supporto $[0,T/3]$. Le $\alpha_{n,j}$ sono variabili casuali che possono valere ± 1, statisticamente indipendenti per valori diversi dell'indice n. Si considerino i seguenti due casi:

1. le terne $(\alpha_{n,0}, \alpha_{n,1}, \alpha_{n,2})$ possono assumere gli 8 valori $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ con uguale probabilità;
2. le terne $(\alpha_{n,0}, \alpha_{n,1}, \alpha_{n,2})$ possono assumere i valori dati dalle 3 terne $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ contenenti esattamente 2 simboli $+1$, con uguale probabilità (1/3).

Esercizio 5.3

Si calcoli lo spettro di potenza del segnale modulato M-PSK (M pari) in banda base

$$\tilde{x}(t) \ = \ \sum_{n} \alpha_n \ s(t - nT) \quad ,$$

assumendo che le variabili casuali complesse α_n siano distribuite nel modo seguente:

1. Le α_n sono statisticamente indipendenti per valori diversi dell'indice n e sono distribuite con probabilità
$$P\left\{\alpha_n \ = \ e^{j\left[\Phi + 2\pi \frac{k}{M}\right]}\right\} \ = \ \frac{2}{M} \quad , \ k = 0, \, 1, \, \ldots \, \frac{M}{2} - 1 \ .$$
2. Le v.c. α_n sono sostituite dalle v.c. β_n ottenute dalle precedenti attraverso la relazione:
$$\beta_n \ = \ e^{j\Phi'} \ \alpha_n \ \alpha^*_{n-1} \ .$$

Capitolo 6

Modulazioni numeriche

Esercizio 6.1

Si considerino gli 8 segnali

$$\begin{cases} s_0(t) = & 0 & & \\ s_1(t) = & p(t) & & \\ s_2(t) = & & p(t-1) & \\ s_3(t) = & p(t) & + \; p(t-1) & \\ s_4(t) = & & & p(t-2) \\ s_5(t) = & p(t) & & + \; p(t-2) \\ s_6(t) = & & p(t-1) & + \; p(t-2) \\ s_7(t) = & p(t) & + \; p(t-1) & + \; p(t-2) \end{cases}$$

con $p(t) = u(t) - u(t-1)$. I segnali sono trasmessi con uguale probabilità su un canale gaussiano bianco additivo con densità spettrale di rumore $N_0/2$.

1. Calcolare la probabilità di errore che si ottiene con un demodulatore ottimo coerente.
2. Interpretare il risultato utilizzando per il canale un modello binario simmetrico.

Esercizio 6.2

Si considerino gli M segnali

$$x_i(t) = \cos\left[2\pi f_0 t + (2i-1)\frac{\pi}{M}\right], \qquad i = 1, \ldots, M$$

definiti per $t \in (0,T)$, $f_0 T \gg 1$. Trovare la dimensionalità di questo insieme di segnali, una base ortonormale ed una rappresentazione vettoriale. Dimostrare che, se la fase dei segnali $x_i(t)$, è ruotata per tutti dello stesso angolo φ, essi possono ancora essere rappresentati usando la stessa base ortonormale.

Esercizio 6.3

Si consideri un modulatore 4-PSK con segnale d'uscita

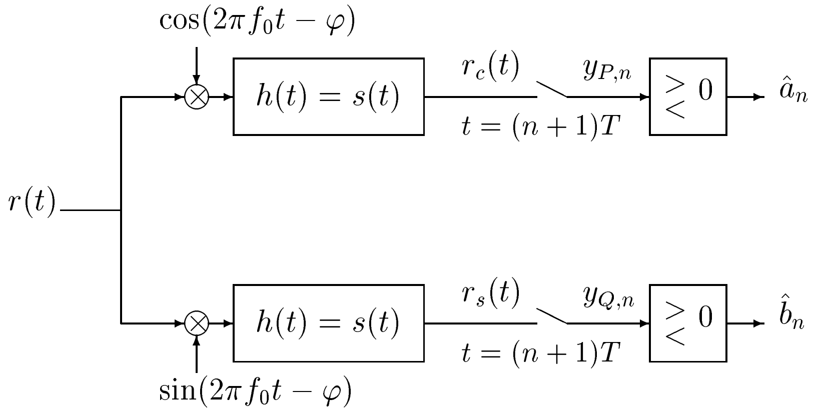
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n s(t-nT)\cos(2\pi f_0 t) + b_n s(t-nT)\sin(2\pi f_0 t)];$$

dove a_n e b_n sono statisticamente indipendenti ed assumono con uguale probabilità i valori ± 1 e $s(t) = u(t) - u(t-T)$.

Il demodulatore (il cui schema è riportato in figura) riceve il segnale $r(t) = s(t) + n(t)$, con $n(t)$ rumore gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$ e utilizza la portante locale $\cos(2\pi f_0 t - \varphi)$, sfasata di φ radianti rispetto alla portante del trasmettitore.

I segnali $r_c(t)$ e $r_s(t)$, ottenuti dalla moltiplicazione di $r(t)$ per $\cos(2\pi f_0 t - \varphi)$ e $\sin(2\pi f_0 t - \varphi)$ rispettivamente, sono filtrati (mediante filtri adattati con risposta all'impulso $h(t) = s(t)$) e campionati a frequenza $1/T$.

All'uscita di ciascuno dei due campionatori è posto un decisore con soglia a zero con cui si decide il valore di a_n e di b_n. Calcolare la probabilità di errore per a_n e b_n in funzione di φ.



Esercizio 6.4

Si consideri l'insieme di M segnali equiprobabili descritti nello spazio bidimensionale nel modo seguente:

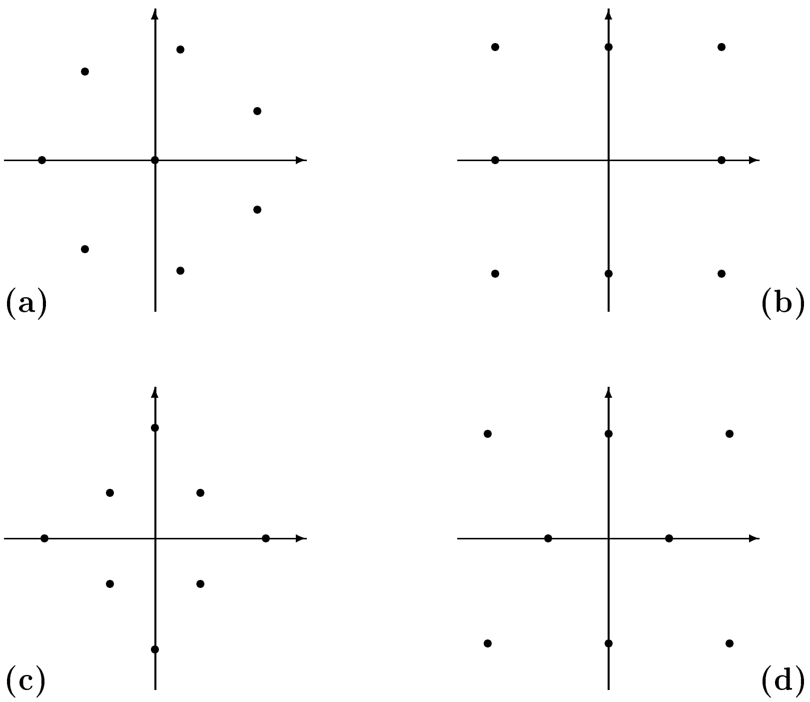
$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} a_i \cos(2\pi f_0 t) - \sqrt{\frac{2}{T}} b_i \sin(2\pi f_0 t) \quad 0 \le t < T \quad i = 1, \ldots, M.$$

1. Calcolare la potenza media $\mathcal{P}$ del segnale trasmesso.
2. Mostrare che, usando lo "union bound", la probabilità di errore sul simbolo nel caso di demodulatore coerente ottimo e canale gaussiano bianco additivo con densità spettrale di potenza di rumore $N_0/2$ può essere maggiorata nel modo seguente:

$$P(e) \leq \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1,k\neq i}^{M} \operatorname{Erfc}\left[\sqrt{\frac{\mathcal{P}T}{N_0}} \left(\frac{d_{ik}}{2\sqrt{(1/M)\sum_{i=1}^{M} |s_i|^2}} \right)\right].$$

Esercizio 6.5

Si considerino le costellazioni di segnali riportate in figura. Per ciascun caso, disegnare le regioni di decisione e determinare l'espressione asintotica della probabilità d'errore in funzione del rapporto E_b/N_0.



Esercizio 6.6

Si consideri un insieme di M segnali con uguale energia che soddisfi le relazioni:

$$\boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j = \mathcal{E} \quad i = j, \qquad \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j = \rho\mathcal{E} \quad i \neq j.$$

Dimostrare che

1. Vale la disuguaglianza
$$\frac{-1}{M-1} \leq \rho \leq 1$$
Suggerimento: si consideri la relazione $|\sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{s}_i|^2$.

2. Per ciascun ρ, l'insieme dei segnali ha la stessa probabilità di errore asintotica dell'insieme di segnali "simplex", e quest'ultimo ha energia media per simbolo pari a
$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E}\left(1 - \frac{1}{M}\right)(1-\rho).$$
Suggerimento: Si consideri l'insieme $\{\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{a}\}_{i=1}^{M}$, in cui $\boldsymbol{a} = (1/M)\sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{s}_i$

3. Come conseguenza del risultato precedente, l'insieme di segnali presenta la stessa probabilità di errore asintotica del sistema di segnali ortogonali con energia
$$\mathcal{E}_o = \mathcal{E}(1-\rho).$$

Esercizio 6.7

Un canale passabanda ideale ha banda pari a 3000 Hz e la massima potenza media disponibile è pari a 1 μW. Il canale può essere considerato di tipo AWGN con densità spettrale di potenza di rumore $N_0/2 = 10^{-10}$ W/Hz.

1. Calcolare la capacità di Shannon del canale analogico.
2. Calcolare la massima velocità di trasmissione in bit/s utilizzando le tre modulazioni 2-PSK, 2-FSK (ortogonale) e 4-PSK (l'occupazione in banda di un segnale M-PSK è pari a $1/T$, dove T è la durata di un simbolo, mentre per un segnale M-FSK è $M/(2T)$).
3. Calcolare la probabilità di errore sul bit nei tre casi, utilizzando la massima velocità di trasmissione.
4. Calcolare la capacità dei canali binari simmetrici equivalenti.

Esercizio 6.8

Una sorgente binaria emette simboli indipendenti, ma non equiprobabili. Siano
$$p = P\{0\} < 1/2 \quad \text{e} \quad q = P\{1\} = 1-p$$
le probabilità di emissione. I bit vengono presi a coppie e trasmessi con una modulazione 4-PSK su canale gaussiano bianco additivo con la seguente associazione tra simboli e coppie di bit:

simbolo	bit	coordinate
$\boldsymbol{s}_0$	00	$\sqrt{\mathcal{E}}(1{,}0)$
$\boldsymbol{s}_1$	01	$\sqrt{\mathcal{E}}(0{,}1)$
$\boldsymbol{s}_2$	10	$\sqrt{\mathcal{E}}(0,-1)$
$\boldsymbol{s}_3$	11	$\sqrt{\mathcal{E}}(-1{,}0)$

I versori utilizzati per la rappresentazione geometrica dei segnali sono

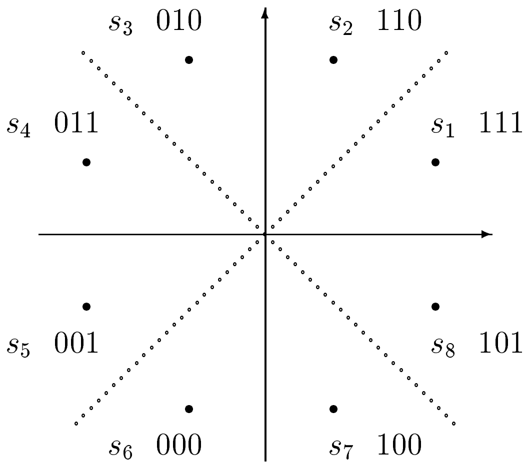
$$\psi_1(t) = \sqrt{2/T}\cos(2\pi f_0 t)u_T(t) \quad \text{e} \quad \psi_2(t) = \sqrt{2/T}\sin(2\pi f_0 t)u_T(t)$$

con $f_0T = m$, m intero.
Noti p, q, la densità spettrale di potenza $N_0/2$ del rumore e l'energia media $\mathcal{E}$ dei simboli, si risponda ai seguenti quesiti:

1. Stabilire le regioni di decisione ottime determinandone i confini secondo il metodo del decisore ottimo. Il confine tra le regioni di decisione R_i e R_j è il luogo dei punti $\boldsymbol{r}$ tali che $p_i f(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_i) = p_j f(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_j)$, dove p_i è la probabilità di trasmissione di $\boldsymbol{s}_i$ e $f(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_i)$ è la funzione densità di probabilità condizionata ad aver trasmesso $\boldsymbol{s}_i$.
2. Disegnare lo schema del demodulatore ottimo che prende le decisioni direttamente sui bit trasmessi, facendo riferimento alle regioni di decisione.
3. Calcolare la probabilità di errore sul primo e sul secondo bit e verificare che sono uguali, facendo riferimento alle regioni di decisione.

Esercizio 6.9

Si consideri uno schema di trasmissione 8-PSK su canale gaussiano bianco additivo con densità spettrale di potenza di rumore $N_0/2$, energia media $\mathcal{E}$ e ricevitore ottimo coerente. Lo spazio dei segnali con le associazioni tra bit e simboli è mostrato in figura:



1. Si disegni il diagramma a blocchi del ricevitore ottimo con decisione basata solo sul segno delle componenti del segnale ricevuto.

2. Si calcoli la capacità del canale discreto equivalente a 8 ingressi e 8 uscite usando per $P(e)$ il limite superiore:
$$P(e) < \text{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{N_0}}\sin\frac{\pi}{M}\right) ,$$
ovvero si assuma che il rapporto $\mathcal{E}/N_0$ sia sufficientemente elevato da considerare solo gli errori tra segnali adiacenti nello spazio dei segnali. Si confronti questa capacità con quelle del 2-PSK e del 4-PSK, in funzione del rapporto $\mathcal{E}_b/N_0$.
N.B. Al fine di effettuare un confronto corretto si esprimano la capacità in bit di informazione per bit trasmessi e non soltanto in bit di informazione per uso di canale.
3. Si calcoli l'espressione esatta (in forma chiusa) della probabilità di errore sul bit $P_b(e)$ utilizzando la codifica Gray riportata in figura.

Esercizio 6.10

Si consideri un sistema di trasmissione QPSK con ricevitore ottimo coerente su un canale descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita:
$$y(t) \;=\; \alpha(t)x(t) \;+\; n(t) \;,$$
dove $x(t)$ è il segnale trasmesso, $n(t)$ è rumore gaussiano bianco additivo con densità spettrale di potenza $N_0/2$ e $\alpha(t)$ è un processo casuale che si mantiene circa costante sull'intervallo di simbolo. Pertanto, la relazione ingresso-uscita tra i campioni del segnale è la seguente:
$$y_n \;=\; \alpha_n\; x_n + \nu_n$$
dove α_n è una variabile casuale reale distribuita alla Rayleigh con valor quadratico medio unitario ($f_\alpha(a) = 2ae^{-a^2}u(a)$) e ν_n è il campione complesso del rumore gaussiano additivo.
Si calcoli la probabilità di errore sul bit assumendo che i bit siano associati ai segnali trasmessi secondo la codifica di Gray.

Suggerimento: nei calcoli compare l'integrale
$$\int_0^\infty \text{Erf}\;(\gamma x)\; 2x\; e^{-x^2}\; dx \;=\; \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}} \;.$$

Esercizio 6.11

Si consideri un sistema di trasmissione basato sulla modulazione QPSK in cui il segnale arriva al ricevitore attraverso due canali statisticamente indipendenti descritti dalle relazioni seguenti
$$y_i(t) \;=\; \alpha_i(t)\cdot x(t) + \nu_i(t) \;, \quad i = 1{,}2 \;,$$
dove $x(t)$ è il segnale modulato QPSK, $\nu_i(t)$ è rumore gaussiano bianco additivo con densità spettrale di potenza $N_0/2$ e $\alpha_i(t)$ rappresenta l'attenuazione del canale ed è un

processo casuale che assume valori costanti sull'intervallo di simbolo con distribuzione di probabilità $f_\alpha(a) = 2ae^{-a^2}$.

Il ricevitore è in grado di selezionare tra i due segnali ricevuti quello per cui $\alpha_i(t)$ è maggiore e prende la decisione su questo demodulando in modo coerente.

1. Calcolare la probabilità di errore sul bit in funzione di E_b/N_0 assumendo che i simboli QPSK siano codificati alla Gray.
2. Verificare che per $E_b/N_0 \to \infty$ tale probabilità si approssima nel modo seguente:
$$P_b(e) \;\cong\; \frac{3}{8(E_b/N_0)^2}\;.$$
3. Calcolare la probabilità di errore sul bit nel caso in cui ci siano $L > 2$ canali indipendenti e la sua espressione asintotica per $E_b/N_0 \to \infty$.

Esercizio 6.12

Una costellazione di segnali, rappresentata mediante una opportuna base ortonormale, corrisponde all'insieme dei vertici di un ipercubo N-dimensionale. L'energia media della costellazione è E_s. Calcolare il coefficiente di correlazione fra segnali alla minima distanza.

Si trovi un esempio in 4 dimensioni di una tale costellazione, rappresentando i segnali nel dominio del tempo, e si determini una base ortonormale per l'esempio trovato.

Esercizio 6.13

Una variabile causale binaria x che assume i valori 0 o 1 con uguale probabilità viene trasmessa su un canale Gaussiano bianco additivo mediante i due segnali

$$s_0(t) \;=\; \begin{cases} At/T & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
$$s_1(t) \;=\; \begin{cases} A - At/T & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove il segnale $s_0(t)$ corrisponde a $x = 0$ e il segnale $s_1(t)$ corrisponde al segnale $x = 1$. Il rumore ha densità spettrale di potenza bilatera $N_0/2$.

Determinare la struttura del ricevitore ottimo e la probabilità di errore media.

Esercizio 6.14

Calcolare la probabilità di errore di un 2-FSK non ortogonale con ricezione coerente con $\Delta f \cdot T = 0.7$. *Nota: Δf indica la spaziatura fra le due frequenze del 2-FSK e T è l'intervallo di simbolo.*

Esercizio 6.15

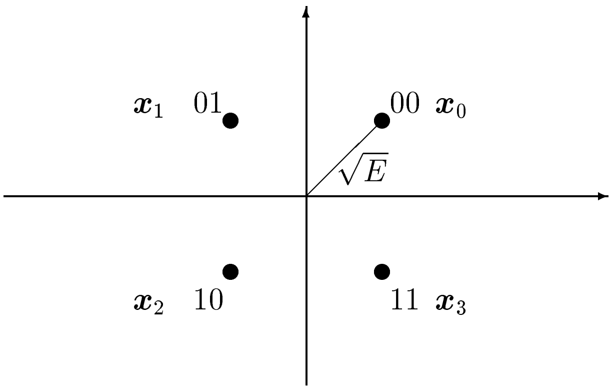
Un modulatore riceve una sequenza di bit statisticamente indipendenti e uniformemente distribuiti sull'alfabeto $\{0,1\}$ e emette simboli x etichettati dalla coppia di bit (b_1,b_2) secondo la seguente corrispondenza

b_1b_2	x
00	$-3d/2$
01	$-d/2$
11	$d/2$
10	$3d/2$

Supponendo che il segnale ricevuto sia $y = x + n$, dove n è un campione di rumore Gaussiano a valor medio nullo e varianza $N_0/2$, calcolare la probabilità di errore media sul bit P_b per il ricevitore a massima verosimiglianza (cioè a minima distanza).

Esercizio 6.16

In una modulazione 4-PSK, a ciascun simbolo sono associati due bit (b_1b_2) con etichettamento naturale:



Supponendo che i bit b_1 e b_2 siano indipendenti con distribuzione di probabilità

$$\begin{cases} P(b_i = 0) = \varepsilon \\ P(b_i = 1) = 1 - \varepsilon \end{cases} \qquad i = 1,2$$

(con $\varepsilon < 0.5$) e che il segnale 4-PSK venga trasmesso su un canale Gaussiano additivo con densità spettrale di potenza di rumore $N_0/2$, determinare le regioni di decisione che minimizzano la probabilità di errore sul simbolo e le regioni di decisione che minimizzano la probabilià di errore sul bit.

Esercizio 6.17

Si considerino i segnali:

$$s_i(t) = \Re\{e^{j2\pi f_i t}(u(t) - u(t-T))\}$$

dove

$$f_i = f_0 + \frac{1}{2T} i$$

con $i = 0,1,\ldots,M-1$. Un modulatore numerico riceve in ingresso la stringa di bit $b_0 b_1 \ldots b_{M-1}$ e trasmette il segnale

$$x(t) = \sqrt{\frac{4E_b}{T}} \left(\sum_{i=0}^{M-1} b_i s_i(t) \right)$$

su un canale Gaussiano bianco additivo con densità spettrale di potenza di rumore $N_0/2$. Determinare l'espressione della probabilità di errore sul simbolo (cioè sulla stringa $b_0 b_1 \ldots b_{M-1}$), in caso di demodulazione ottima coerente.

Esercizio 6.18

Trovare un limite superiore il più stretto possibile alla probabilità di errore sul simbolo per la costellazione di $2M$ segnali in M dimensioni $S = \{\pm \mathbf{x}_i\}_{i=1}^{M}$, dove gli M segnali $\mathbf{x}_i$ sono mutuamente ortogonali e hanno energia E_s. Il canale è Gaussiano additivo con densità spettrale di potenza $N_0/2$ e il ricevitore è a massima verosimiglianza.

Esercizio 6.19

Si consideri il canale tempo-discreto additivo $y = x + n$ dove x assume con uguale probabilità i valori $\pm A$ e n è una variabile Laplaciana con densità di probabilità

$$p_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-|z|\sqrt{2}/\sigma}$$

Determinare le regioni di decisione e la probabilità di errore del ricevitore a massima verosimiglianza. Confrontare la probabilità di errore ottenuta con la probabilità di errore nel caso n sia Gaussiana, a parità di rapporto segnale-rumore.

Esercizio 6.20

Si consideri un canale di trasmissione che impiega $n-1$ ripetitori rigenerativi più il ricevitore finale e dove si trasmette dell'informazione binaria. Supponendo che la probabilità di errore di ciascun ricevitore sia p e che gli errori in ogni ricevitore siano statisticamente indipendenti, determinare un'espressione generale per la probabilità di errore in uscita, cioè dopo il ricevitore finale.

Mediante l'espressione trovata, si determini la probabilità di errore nel caso $p = 10^{-7}$ e $n = 50$.

Esercizio 6.21

Una costellazione di M segnali ortogonali è costruita variando la posizione di un impulso elementare. I segnali sono

$$x_i(t) = s(t - iT) \quad i = 0,1,2,\ldots,M-1$$

dove

$$s(t) = A(u(t) - u(t - T/M))$$

Determinare la dipendenza della "potenza di picco" definita come $\mathcal{P} = A^2$ al variare di M affinchè questo sistema abbia la stessa probabilità di errore di un M-FSK ortogonale.

Esercizio 6.22

Calcolare il guadagno asintotico della costellazione S_1 rispetto alla costellazione S_2.

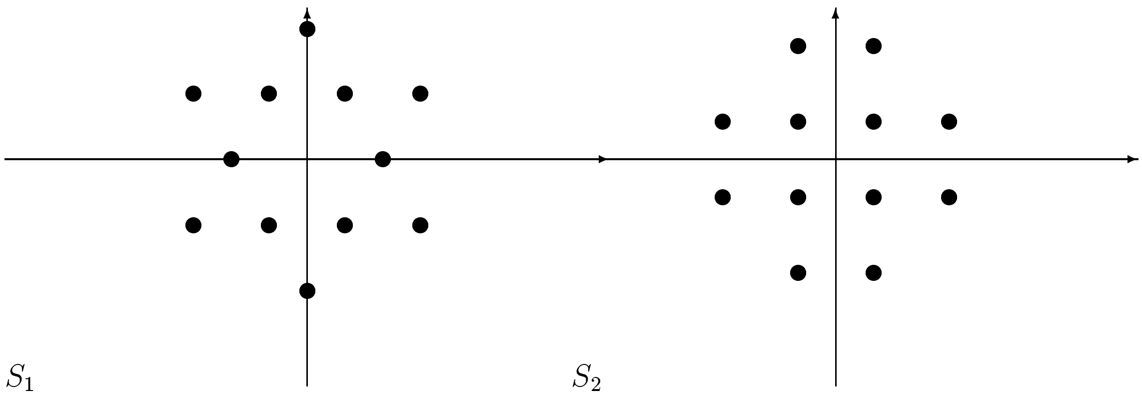


Figura 6.1 Costellazioni S_1 e S_2

Esercizio 6.23

Si consideri un canale di trasmissione on-off con diversità 2. Il ricevitore osserva i due segnali

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1 x + n_1 \\ y_2 &= g_2 x + n_2 \end{aligned}$$

dove $x \in \{\pm\sqrt{E_b}\}$, n_1 e n_2 sono variabili Gaussiane reali indipendenti e identicamente distribuite, con valor medio 0 e varianza $N_0/2$ e dove g_1 e g_2 sono variabili casuali discrete, indipendenti ed identicamente distributite, che assumono i valori 0 o 1 con probabilità rispettivamente 0.1 e 0.9.

Si calcoli la probabilità di errore media sul bit per un ricevitore a selezione, che prende la decisione sul segnale x basata su y_1 se $g_1 \geq g_2$ oppure su y_2 se $g_1 < g_2$.

Esercizio 6.24

Per il canale del on-off del problema precedente, si consideri un ricevitore a combinazione, che prende la decisione per il segnale x basata sul segnale combinato

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Si trovino i coefficienti α_1 e α_2 del combinatore che massimizzano il rapporto segnale-rumore dati g_1 e g_2. Per tali coefficenti si calcoli la probabilità di errore sul bit.

Capitolo 7

Trasmissione di segnali PCM

Esercizio 7.1

Si devono multiplare con tecnica TDM/PCM 12 canali telefonici con banda pari a 4 kHz e si vuole garantire un rapporto segnale/rumore sopra soglia, per ogni canale, di almeno 60 dB. Il flusso di dati binari cosí ottenuto è trasmesso mediante modulazione QPSK con energia media E.

1. Determinare la velocità di trasmissione in bit/s.
2. Valutare la larghezza di banda necessaria per trasmettere il segnale.
3. Calcolare il valore minimo del rapporto E_b/N_0 per il quale è garantito che il PCM lavori sopra soglia.

Esercizio 7.2

Si vogliono multiplare con tecnica TDM/PCM dei segnali analogici di 2.5 kHz di banda, quantizzandoli su 32 livelli. La banda passante del canale consente di trasmettere impulsi di durata non inferiore a 1μs. Determinare il numero massimo di segnali che si possono multiplare utilizzando la modulazione 2-PAM.

Esercizio 7.3

Un segnale analogico di banda $B = 3$ kHz è trasmesso utilizzando il sistema PCM. L'ampiezza del segnale è distribuita uniformemente su $(-A,A)$ e il convertitore A/D lavora sullo stesso intervallo di ampiezza $(-A,A)$. Per la trasmissione del segnale digitale si utilizza un modulatore 16-PAM. Assumendo che la distorsione di quantizzazione non possa eccedere l'1% della tensione picco-picco del segnale analogico ($2A$), si determini:

1. Il minimo numero di bit/campione da utilizzare.
2. La minima velocità di campionamento.
3. La minima velocità di trasmissione in bit/s.
4. La minima velocità di trasmissione in simboli PAM/s.
5. La minima banda richiesta.
6. Il rapporto segnale rumore di quantizzazione.
7. Il minimo valore di E_b/N_0 necessario sul canale in modo da lavorare sopra soglia.

Esercizio 7.4

Si consideri un sistema di trasmissione con banda complessiva disponibile $W = 1$ MHz. Su questo sistema si trasmettono N segnali analogici con banda $B = 4$ kHz utilizzando una delle seguenti tecniche:

1. FM/FDM con deviazione di frequenza $\Delta f_e = 40$ kHz, punto di lavoro sopra soglia e indice di modulazione sufficientemente elevato per poter approssimare convenientemente la banda occupata dal segnale modulato;
2. DSB-AM/FDM con soppressione di portante;
3. PCM/TDM con margine di 3 dB rispetto alla soglia con modulazione QPSK.

Il canale di trasmissione ha attenuazione complessiva di 20 dB ed è affetto da rumore gaussiano bianco additivo con densità spettrale $N_0/2 = 50$ nW/Hz al ricevitore. Si vuole avere un rapporto segnale/rumore all'utente pari a 36 dB.

1. Calcolare il valore massimo di N in ciascun caso.
2. Calcolare la potenza in uscita del trasmettitore *per ogni segnale* P_T necessaria per soddisfare le specifiche date in ciascun caso.

Esercizio 7.5

Calcolare il rapporto segnale-rumore di quantizzazione (SNRQ) per un segnale distribuito uniformemente su $[-1,1]$ e quantizzato con 128 livelli.

Esercizio 7.6

Un processo stazionario $x(t)$ ha funzione di autocorrelazione $R_x(\tau) = e^{-|\tau|}\cos(2\pi f_0 \tau)$. Sapendo che $|x(t)| \leq 1$ si calcoli il numero di livelli necessario per ottenere un SNRQ di almeno 90 dB utilizzando un PCM uniforme.

Esercizio 7.7

Un processo stazionario $x(t)$ è distribuito secondo $f_X(x) = \frac{1}{2}\Lambda(\frac{x}{2})$. $x(t)$ viene quantizzato usando un quantizzatore uniforme a 4 livelli definito da

$$Q(x) = \begin{cases} 1.5 & 1 < x \leq 2 \\ 0.5 & 0 < x \leq 1 \\ -0.5 & -1 < x \leq 0 \\ -1.5 & -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

Trovare la p.d.f. di $y(t) = x(t) - Q(x(t))$. Trovare l'SNRQ risultante. Determinare il compander ottimo per $x(t)$ e determinare l'SNRQ risultante in questo caso.

Esercizio 7.8

La frequenza di campionamento di un CD è 44.1 kHz e i campioni sono quantizzati con 16 bit per canale stereo. Determinare la memoria (in kbytes) necessaria per un brano musicale di 4.27 minuti.

Esercizio 7.9

Consideriamo un sistema PCM uniforme che trasmette i bit del segnale quantizzato su un canale di trasmissione numerico con probabilità di errore sul bit p. I campioni sono codificati in modo "naturale", cioè il minimo valore corrisponde alla stringa binaria di tutti zeri e il massimo valore corrisponde alla stringa binaria di tutti 1. Determinare un espressione per il rapporto segnale-rumore complessivo del segnale ricostruito al ricevitore in funzione del numero di bit di quantizzazione n, della probabilità di errore p e del valore quadratico medio del segnale normalizzato $x'(t) = x(t)/x_{\max}$ (si assuma che non ci sia errore di "overload", cioè che il quantizzatore abbia una dinamica di ingresso $[-x_{\max}, x_{\max}]$).

Capitolo 8

Interferenza intersimbolica

Esercizio 8.1

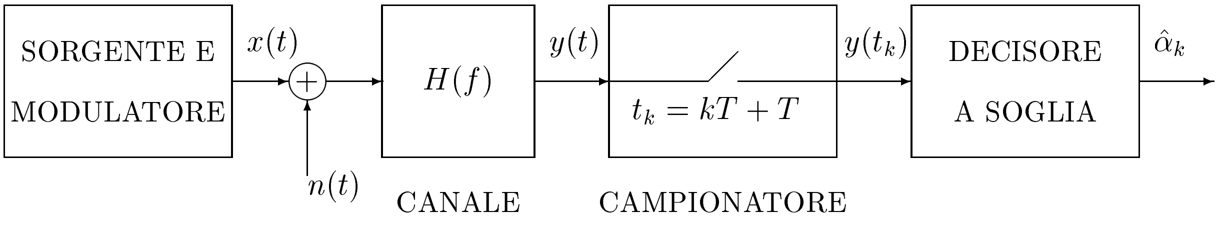
Si consideri un sistema di trasmissione dati di tipo 2-PAM che lavora alla velocità di 9600 bit/s con probabilità di errore inferiore a 10^{-5}. La funzione di trasferimento del canale è

$$C(f) = \begin{cases} 1 & |f| < W = 6000\,\mathrm{Hz} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Il canale è affetto da rumore gaussiano bianco additivo con densità spettrale di potenza $N_0/2 = 10^{-6}$ W/Hz. Scegliere il filtro formatore $S(f)$ e il filtro di ricezione $U(f)$ in modo tale da minimizzare la potenza media trasmessa eliminando al tempo stesso l'interferenza intersimbolica. Calcolare la potenza del segnale all'uscita del filtro formatore.

Esercizio 8.2

Si consideri il sistema di trasmissione numerica schematizzato in figura:



Il modulatore è di tipo 2-PAM e il segnale di uscita ha espressione:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k u_T(t - kT)$$

dove $\alpha_k \in \{-1,1\}$ e $u_T(t) = u(t) - u(t-T)$. $n(t)$ è un rumore gaussiano bianco additivo con densità spettrale di potenza $N_0/2$. La funzione di trasferimento del canale è:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau}.$$

Il dispositivo di decisione opera secondo la regola:

$$\hat{\alpha}_k = \begin{cases} +1 \text{ se } y(t_k) > 0 \\ -1 \text{ se } y(t_k) \leq 0 \end{cases}$$

1. Verificare che si ha interferenza intersimbolica.
2. Calcolare la distorsione di picco.
3. Calcolare la probabilità di errore tenendo conto dei primi due campioni interferenti e trascurando gli altri.
4. Riportare in grafico tale probabilità di errore in funzione della banda equivalente di rumore di $H(f)$ e interpretare il risultato.

Esercizio 8.3

Un sistema di trasmissione consiste di:

□ Modulatore 2-PAM che genera il segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \, s(t - nT) \, ,$$

dove $s(t) = u(t) - u(t-T)$ e le α_n sono variabili casuali statisticamente indipendenti che assumono i valori $\pm A$ con la stessa probabilità.

□ Canale lineare con risposta all'impulso

$$h(t) = \frac{1}{T} \left[1 - \frac{t}{MT}\right] [u(t) - u(t - MT)] \, ,$$

con M intero maggiore di 1.

Assunte queste ipotesi,

1. Si calcoli $q(t) = s(t) * h(t)$, la risposta all'impulso complessiva del sistema.
2. Si determini l'istante di campionamento t_0 che rende massima $|q(t)|$.

3. Si calcoli la distorsione di picco

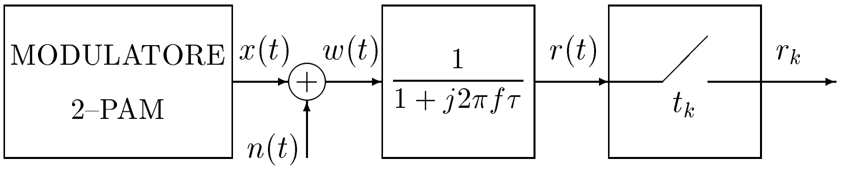
$$D_p \;=\; \frac{\sum_{k\neq 0} |q_k|}{|q_0|} \;,$$

dove $q_k = q(t_0 + kT)$.

4. Si determini per quali valori di M il diagramma ad occhio è aperto ($D_p < 1$).

Esercizio 8.4

Si consideri il seguente sistema di trasmissione numerica



Esso consiste di:

- □ Modulatore 2-PAM che genera il segnale

$$x(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \; s(t-nT) \;,$$

dove $s(t) = u(t) - u(t-T)$ e le α_n sono variabili casuali statisticamente indipendenti che assumono i valori $\pm A$ con la stessa probabilità.

- □ Canale con funzione di trasferimento unitaria affetto da rumore gaussiano bianco additivo $n(t)$ con densità spettrale di potenza $N_0/2$.
- □ Filtro di ricezione con funzione di trasferimento

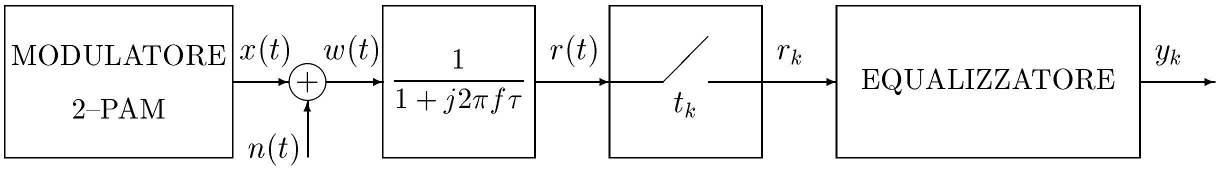
$$H(f) \;=\; \frac{1}{1 + j2\pi f\tau} \;.$$

- □ Campionatore del segnale ricevuto $r(t)$ negli istanti $t_k = (k+1)T$ che produce i campioni $r_k = r(t_k)$.

1. Calcolare il rapporto segnale/rumore dopo il filtro di ricezione.
2. Determinare la banda equivalente di rumore B_{eq} del filtro di ricezione.
3. Determinare il valore di T che rende massimo, per τ costante, il rapporto tra la potenza istantanea della parte utile e del disturbo (interferenza intersimbolica + rumore) nei campioni r_k.

Esercizio 8.5

Si consideri il seguente sistema di trasmissione numerica



Esso consiste di:

- ☐ Modulatore 2-PAM che genera il segnale

$$x(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \; s(t-nT) \; ,$$

  dove $s(t) = u(t) - u(t-T)$ e le α_n sono variabili casuali statisticamente indipendenti che assumono i valori $\pm A$ con la stessa probabilità.

- ☐ Canale con funzione di trasferimento unitaria affetto da rumore gaussiano bianco additivo $n(t)$ con densità spettrale di potenza $N_0/2$.

- ☐ Filtro di ricezione con funzione di trasferimento

$$H(f) \;=\; \frac{1}{1+j2\pi f\tau} \; .$$

- ☐ Campionatore del segnale ricevuto $r(t)$ negli istanti $t_k = (k+1)T$ che produce i campioni $r_k = r(t_k)$.

- ☐ Equalizzatore lineare la cui relazione ingresso-uscita è la seguente:

$$y_k = r_k + a_1 r_{k-1} + a_2 r_{k-2} \; .$$

1. Calcolare la varianza σ_n^2 delle componenti di rumore ν_k nei campioni del segnale ricevuto.
2. Identificare nei campioni y_k la componente utile, l'interferenza intersimbolica e il rumore gaussiano additivo.
3. Determinare i valori di a_1 e a_2 che annullano l'interferenza intersimbolica dopo l'equalizzatore e calcolare il corrispondente rapporto segnale/rumore tra le varianze del campione utile e del rumore (si tenga presente che i campioni del rumore filtrato *non sono statisticamente indipendenti*).
4. Determinare i valori di a_1 e a_2 che minimizzano la varianza del disturbo (interferenza intersimbolica + rumore) dopo l'equalizzatore e calcolare il corrispondente rapporto segnale/disturbo tra le varianze del campione utile e del disturbo.

Esercizio 8.6

Si consideri un sistema di trasmissione 2-PAM in banda base in cui il segnale ricevuto è:

$$x(t) \; = \; \sum_n a_n \, q(t - nT) \; + \; n(t) \; ,$$

dove le a_n sono variabili casuali statisticamente indipendenti che prendono i valori ± 1 con uguale probabilità e $n(t)$ è un rumore gaussiano bianco additivo.
La trasformata di Fourier di $q(t)$ è

$$Q(f) \; = \; \frac{\alpha T}{(1 + j2\pi f \alpha T)^2}$$

con $0 < \alpha < 1$.

1. Si determini la banda equivalente di rumore B_{eq} del filtro che ha come funzione di trasferimento $Q(f)$.
2. Si determini la distorsione di picco del sistema definita come

   $$d_p \; = \; \frac{\sum_{k \neq 0} |q(t_k)|}{|q(t_0)|} \; ,$$

   scegliendo come istante di campionamento t_0 quello corrispondente al massimo di $|q(t)|$.
3. Si determini la distorsione di picco del sistema per un valore di α tale che $B_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{2T}$, ovvero la banda equivalente di rumore è uguale alla banda di Nyquist.
4. Assumendo che l'istante di campionamento t_0 sia affetto da un fattore di errore uniformemente distribuito su $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ moltiplicativo calcolare il valor medio della distorsione di picco.

Esercizio 8.7

Si consideri un sistema di trasmissione 2-PAM in banda base in cui il segnale ricevuto è:

$$x(t) \; = \; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n q(t - nT) \; + \; n(t) \; ,$$

dove le α_n sono variabili casuali statisticamente indipendenti che prendono i valori ± 1 con uguale probabilità.
La trasformata di Fourier di $q(t)$ è

$$Q(f) \; = \; H_2\left(\frac{f}{\beta/(2T)}\right) \qquad \text{dove} \qquad H_2(x) \; = \; \frac{1}{1 + j\sqrt{2}x - x^2}$$

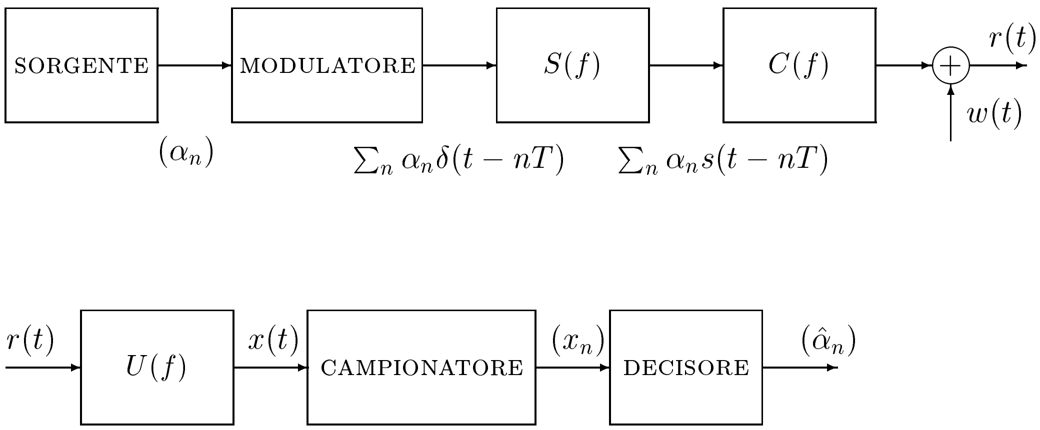
dove $H_2(x)$ è la funzione di trasferimento di un filtro di Butterworth a due poli con banda a 3 dB unitaria. La banda di $Q(f)$ è $\beta/(2T)$, ovvero la banda minima di Nyquist moltiplicata per il fattore β.

1. Verificare che $q(t)$ è una funzione reale e unilatera analizzando $Q(f)$.
2. Determinare $q(t)$.
3. Calcolare numericamente la distorsione di picco del sistema per $\beta = 0.5, 1.0, 2.0$ prendendo come istante di campionamento quello in cui $|q(t)|$ è massima in ciascun caso.
4. Calcolare numericamente il valore minimo di β che garantisce l'apertura del diagramma ad occhio.

Esercizio 8.8

Si consideri il sistema di trasmissione riportato in figura in cui

- □ le $\alpha_n \in \{-A, +A\}$ sono variabili casuali equiprobabili e statisticamente indipendenti;
- □ $w(t)$ è un rumore gaussiano bianco additivo con densità spettrale di potenza $N_0/2$.



Assegnate $S(f)$ e $C(f)$, si scelga $U(f)$ (filtro di ricezione) in modo tale che

- □ sia realizzabile come filtro adattato in cascata ad un filtro trasversale a meno di un'opportuna rotazione di fase;
- □ massimizzi alla sua uscita, per un dato istante di campionamento, il rapporto tra la potenza istantanea del segnale utile e la potenza dell'interferente intersimbolico più rumore.

Esercizio 8.9

Si consideri un sistema di trasmissione 2-PAM in banda base. Il segnale trasmesso è

$$x(t) = \sum_n \alpha_n s(t - nT)$$

dove $s(t) = u(t) - u(t - T)$ e dove le variabili α_n assumono in modo indipendente ed equiprobabile i valori $\pm A$. Al segnale $x(t)$ viene sommato un rumore Gaussiano bianco $n(t)$ con densità spettrale di potenza bilatera $N_0/2$. Il segnale somma $x(t) + n(t)$ viene passato attraverso un canale lineare tempo-invariante con risposta all'impulso

$$h(t) = u(t) - u(t - T - \tau)$$

con $0 < \tau < T$. Il ricevitore campiona il segnale $r(t)$ in uscita dal canale all'istante t_k e prende una decisione $\widehat{\alpha}_k$ relativa alla variabile di informazione α_k secondo la regola

$$\widehat{\alpha}_k = \begin{cases} +A & \text{se } r(t_k) \geq 0 \\ -A & \text{se } r(t_k) < 0 \end{cases}$$

Determinare i valori di t_k affinchè il campione di segnale utile (cioè il coefficiente che moltiplica α_k nell'espressione di $r(t_k)$) sia massimo. Per questi valori, determinare la distorsione di picco D_p.

Esercizio 8.10

Si consideri un sistema di trasmissione 2-PAM in banda base. Il segnale trasmesso è

$$x(t) = \sum_n \alpha_n s(t - nT)$$

dove $s(t) = u(t) - u(t - T)$ e dove le variabili α_n assumono in modo indipendente ed equiprobabile i valori $\pm A$. Al segnale $x(t)$ viene sommato un rumore Gaussiano bianco $n(t)$ con densità spettrale di potenza bilatera $N_0/2$. Il segnale somma $x(t) + n(t)$ viene passato attraverso un canale lineare tempo-invariante con risposta all'impulso

$$h(t) = u(t) - u(t - T - \tau)$$

con $0 < \tau < T$. Il ricevitore campiona il segnale $r(t)$ in uscita dal canale all'istante t_k e prende una decisione $\widehat{\alpha}_k$ relativa alla variabile di informazione α_k secondo la regola

$$\widehat{\alpha}_k = \begin{cases} +A & \text{se } r(t_k) \geq 0 \\ -A & \text{se } r(t_k) < 0 \end{cases}$$

Determinare il valore di t_k affinchè il valore quadratico medio del campione interferente sia minimo.

Esercizio 8.11

Si consideri un sistema di trasmissione 2-PAM in banda base. Il segnale trasmesso è

$$x(t) = \sum_n \alpha_n s(t - nT)$$

dove $s(t) = u(t) - u(t - T)$ e dove le variabili α_n assumono in modo indipendente ed equiprobabile i valori $\pm A$. Al segnale $x(t)$ viene sommato un rumore Gaussiano bianco

$n(t)$ con densità spettrale di potenza bilatera $N_0/2$. Il segnale somma $x(t) + n(t)$ viene passato attraverso un canale lineare tempo-invariante con risposta all'impulso

$$h(t) = u(t) - u(t - T - \tau)$$

con $0 < \tau < T$. Il ricevitore campiona il segnale $r(t)$ in uscita dal canale all'istante t_k e prende una decisione $\widehat{\alpha}_k$ relativa alla variabile di informazione α_k secondo la regola

$$\widehat{\alpha}_k = \begin{cases} +A & \text{se } r(t_k) \geq 0 \\ -A & \text{se } r(t_k) < 0 \end{cases}$$

Supponendo che $(k+1)T \leq t_k \leq (k+1)T + \tau$, determinare il valore di t_k che minimizza la probabilità di errore $P(e) = P(\alpha_k \neq \widehat{\alpha}_k)$. *Suggerimento: ponete* $\Delta = t_k - (k+1)T$ *e usate il fatto che la funzione* $Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ *è convessa per* $x \geq 0$, *e che quindi, dati due valori non-negativi* x_1 *e* x_2 *si ha:*

$$\frac{1}{2}\left(Q(x_1) + Q(x_2)\right) \geq Q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Esercizio 8.12

Un modulatore 2-PAM trasmette il segnale

$$x(t) = \sum_k \alpha_k s(t - kT)$$

dove i simboli α_k sono indipendenti, equiprobabili e assumono valori nell'insieme $\{\pm A\}$, il segnale elementare $s(t)$ è dato da

$$s(t) = u(t) - u(t - T)$$

Il ricevitore è costituito da un filtro con risposta all'impulso $h(t) = \frac{1}{T}s(t)$ seguito da un campionatore che campiona il segnale filtrato $z(t)$ al tempo t_k. Il campione di segnale $z_k = z(t_k)$ viene usato per decidere sulla variabile α_k.
Si determini l'istante di campionamento ottimo $t_k = t_k^*$. Per il valore t_k^* trovato, si supponga che, a causa di un non perfetto sincronismo, l'istante di campionamento sia dato da $t_k = t_k^* + \varepsilon$ dove ε è una variabile casuale uniformemente distribuita sull'intervallo $[-T/M, T/M]$ $(M > 1)$. Esprimere la distorsione di picco in funzione di ε e trovarene la media $E[D_p]$.

Esercizio 8.13

Si consideri il segnale 2-PAM

$$x(t) = \sum_k \alpha_k s(t - kT)$$

dove $\alpha_k \in \{\pm\sqrt{E_b}\}$ e dove

$$s(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & t \in [-T/2,T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Questo segnale viene trasmesso attraverso un canale con risposta all'impulso

$$h(t) = \delta(t) + \beta\delta(t-\tau)$$

con $\beta = 1/2$ e $\tau = T/2$. Il segnale ricevuto all'uscita del canale è

$$y(t) = h(t) * x(t) + n(t)$$

dove * indica il prodotto di convoluzione e $n(t)$ è un rumore Gaussiano biano con densità spettrale di potenza $N_0/2$.

Il ricevitore è composto da un filtro adattato a $s(t)$ seguito da un campionatore che campiona agli istanti t_k e da un decisore a soglia 0 che prende le decisioni sulle variabili α_k basate sui campioni $r(kT)$, dove $r(t)$ è l'uscita del filtro adattato a $s(t)$. Calcolare la distorsione di picco e la probabilità di errore sul bit.

Si consideri ora un ricevitore modificato con l'inserzione di un equalizzatore fra il campionatore e il decisore. L'equalizzatore è un filtro trasversale FIR a tre prese, la cui relazione ingresso-uscita è

$$z_k = c_{-1}r((k-1)T) + c_0 r(kT) + c_1 r((k+1)T)$$

- □ Determinare la risposta all'impulso complessiva $\{q_n\}$ del canale tempo-discreto con ingresso $\{\alpha_k\}$ e uscita $\{z_k\}$ osservato all'uscita dell'equalizzatore.
- □ Calcolare i coefficienti del filtro (c_{-1},c_0,c_1) affinchè $q_0 = 1$ e $q_{-1} = q_1 = 0$. 3) Per questi coefficienti, determinare la distorsione di picco e la probabilità di errore sul bit e confrontarla con i risultati ottenuti in assenza dell'equalizzatore.
- □ Calcolare i coefficienti del filtro che minimizzano l'errore quadratico medio

  $$\varepsilon^2 = E[|z_k - \alpha_k|^2]$$

  per un rapporto $E_b/N_0 = 10$ dB.

Capitolo 9

Esercitazione in laboratorio: Capacità di canale

In questa esercitazione vogliamo calcolare la capacità di un canale discreto senza memoria originato dalla trasmissione di un segnale numerico a due livelli, antipodale, in un canale Gaussiano additivo.

In un opportuno spazio di segnali, il canale può essere rappresentato mediante il modello:

$$Y = X + N$$

dove X è una variabile casuale che assume con probabilità uniforme i valori ± 1 e N è una variabile casuale Gaussiana con valor medio zero e varianza σ^2. La variabile Y viene quantizzata su M livelli equispaziati $\{y_j : j = 0, \ldots, M-1\}$ definiti da:

$$y_j = (2j - M + 1)\Delta/2 + \varepsilon \qquad j = 0, \ldots, M-1$$

dove ε è un offset del quantizzatore.

Esercizio 1.

Il canale risultante dalla quantizzazione ha due ingressi $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ e M uscite y_j. Trovare l'espressione della probabilità di transizione del canale $p(y_j|x_i)$.

Esercizio 2.

Usando la matrice di transizione con elementi $p(y_j|x_i)$ determinata precedentemente, trovare la capacità del canale nel caso $\varepsilon = 0$, $\sigma^2 = 1$ e $M = 2,3,4,5$. (si noti che il canale risultante per $\varepsilon = 0$ è simmetrico in senso lato).

Esercizio 3.

Per calcolare la capacità C nel caso generale $\varepsilon \neq 0$ dobbiamo ricorrere a un metodo numerico: l'algoritmo di Blahut-Arimoto. Questo è descritto come segue.

Si consideri un canale discreto senza memoria con n ingressi e m uscite e con matrice di transizione $n \times m$, $\mathbf{P}$ con elementi $p(y_j|x_i)$. Si inizializzi il vettore di n componenti $\boldsymbol{\alpha}^{(0)} = (1/n, \ldots, 1/n)$. Per ogni passo i si calcoli

1.
$$c_j(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) = \sum_{k=1}^{m} p(y_k|x_j)\log_2 \frac{p(y_k|x_j)}{\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell^{(i)} p(y_k|x_\ell)}$$
per $j = 1,\ldots,n$. ($\alpha_\ell^{(I)}$ indica l'elemento ℓ-esimo di $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$).

2.
$$C^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(i)} c_j(\boldsymbol{\alpha}^{(i)})$$

3.
$$\alpha_j^{(i+1)} = \alpha_j^{(i)} \frac{c_j(\boldsymbol{\alpha}^{(i)})}{C^{(i)}}$$

Si può dimostrare che $\lim_{i\to\infty} C^{(i)} = C$.
Si scriva un programma Matlab che implementa l'algorithmo di Blahut-Arimoto e si verifichi il suo funzionamento ricalcolando numericamente i risultati ottenuti nell'esercizio precedente.

Esercizio 4.

Si calcoli la capacità nei casi $M = 2,3,4,5$, $\sigma^2 = 1$ al variare di ε. Si disegni (usando la funzione `plot` di Matlab) il grafico di C in funzione di ε. A che cosa corrisponde il valore $\varepsilon = 0$?

Capitolo 10

Esercitazione in laboratorio: Simulazione si un sistema di trasmissione numerica

In questa esercitazione vogliamo verificare i risultati sulla probabilità di errore sul simbolo per una modulazione numerica mediante la tecnica della simulazione al computer.
Una modulazione 16QAM, con energia media per bit E_b, viene usata per trasmettere su un canale additivo Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$.

Esercizio 1.

Si determini

- ☐ L'espressione esatta della probabilità di errore media sul simbolo $P(e)$, in funzione del rapporto E_b/N_0.
- ☐ Il limite superiore sulla $P(e)$ mediante lo Union Bound.

Disegnare il grafico delle tre espressioni trovate in funzione di $(E_b/N_0)_{\mathrm{dB}}$, usando la funzione `semilogy` di Matlab.

Esercizio 2.

Si scriva un programma Matlab per stimare (simulare) la probabilità di errore $P(e)$ secondo lo schema seguente.
Si inizializza un contatore di errori $N_e = 0$. Per $k = 1,2,\ldots,N$,

1. Si generi un punto $\boldsymbol{x}$ del 16QAM a caso, con una distribuzione uniforme.
2. Si generi un vettore bidimensionale di rumore $\boldsymbol{n}$ con distribuzione Gaussiana.
3. Si calcoli $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$.
4. Si determini il punto a minima distanza

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \arg \min_{\boldsymbol{x} \in 16\mathrm{QAM}} |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2$$

5. Se $\widehat{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{x}$, allora si incrementi di 1 il contatore di errori N_e.

Se N è sufficientemente grande, $P(e) \simeq N_e/N$.

Il programma deve avere come ingressi il numero totale di iterazioni N e il rapporto E_b/N_0 in dB, e deve restituire in uscita la probabilità di errore stimata e anche il numero di errori N_e. Si noti che, per avere una stima ragionevolmente accurata, è necessario trovare un numero di errori $N_e \geq 100$.

Esercizio 3.

Usando il programma scritto al punto precedente, calcolate per simulazione alcuni punti $((E_b/N_0)_{\mathrm{dB}},P(e))$ e riportateli sul grafico ottenuto nell'Esercizio 1. Per contare almeno 100 errori, dovete scegliere un numero di iterazioni $N \geq 100/P(e)$. Dunque non potete simulare valori di $P(e)$ troppo bassi, altrimenti N risulterebbe troppo grande (il tempo di simulazione sarebbe troppo lungo) oppure la stima non sarebbe affidabile (il numero di errori contato sarebbe troppo basso).

Capitolo 11

Esercitazione in laboratorio: Diagramma ad occhio e interferenza intersimbolica

Il modello di canale di trasmissione utilizzato in questa esercitazione è descritto dal diagramma a blocchi di figura 11. La sorgente genera una sequenza di variabili casuali

$$a_k \in \{2i - M + 1 \quad : \quad i = 0, \ldots, M - 1\}$$

Il modulatore M-PAM crea il segnale modulato

$$x(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$$

I filtri di trasmissione e di ricezione hanno risposte all'impulso $h_{\mathrm{tx}}(t)$ e $h_{\mathrm{rx}}(t)$. Il segnale trasmesso è

$$y(t) = \sum_k a_k h_{\mathrm{tx}}(t - kT)$$

Si suppone che il canale non introduca nè distorsione nè rumore. Dunque il segnale ricevuto è ancora $y(t)$ mentre dopo il filtro di ricezione, il segnale è

$$r(t) = \sum_k a_k g(t - kT)$$

dove $g(t) = h_{\mathrm{tx}}(t) * h_{\mathrm{rx}}(t)$.

Nella vostra area di lavoro avete a disposizione le seguenti funzioni Matlab:

- □ `eyedia.m`: Disegna il diagramma ad occhio del segnale $r(t)$.
- □ `rcr.m`: Calcola i coefficienti di un filtro FIR che approssima un filtro con risposta in frequenza uguale alla radice quadrata di un filtro a coseno rialzato, con un dato fattore di roll-off α.

Segnali in tempo discreto.

Anche se, teoricamente, facciamo riferimento a segnali nel dominio del tempo continuo, il computer tratta solo segnali nel tempo discreto (segnali campionati). Occorre dunque scegliere prima di tutto un'opportuna frequenza di campionamento. Per un segnale M-PAM con intervallo di simbolo T, la minima occupazione di banda è $1/(2T)$ (per il criterio di Nyquist). Quindi una frequenza di campionamento $1/T$ sarebbe sufficiente. Tuttavia, per poter vedere bene le forme d'onda nel tempo si sceglie normalmente almeno 8 campioni per simbolo (cioè si campiona con una frequenza $8/T$). In seguito, si normalizza l'intervallo di simbolo come $T = 1$ (questo corrisponde ad un semplice fattore di scala sull'asse dei tempi). Dunque il numero di campioni per simbolo sarà uguale alla frequenza di campionamento.

Esercizio 1.

Usate sia in trasmissione che in ricezione filtri con la risposta all'impulso rettangolare

$$h_{\mathrm{tx}}(t) = h_{\mathrm{rx}}(t) = u(t) - u(t-1)$$

e osservate il diagramma ad occhio per $M = 2{,}4{,}8$ *Nota: per generare un diagramma ad occhio significativo, occorre generare un numero significativo di simboli, per esempio almeno 100 simboli.*

Esiste un istante di tempo in cui il segnale è privo di interferenza intersimbolica (ISI)? Se esiste, sapreste spiegare perchè? (usate il criterio di Nyquist). In questo caso, è $h_{\mathrm{rx}}(t)$ il filtro adattato per il segnale numerico ricevuto?

Esercizio 2.

Generate un filtro FIR che approssima la radice quadrata di coseno rialzato $h_{\mathrm{RCR}}(t)$ con fattore di roll-off $\alpha = 0.5$. (Usate la funzione Matlab, con una lunghezza del filtro, cioè il numero di coefficienti, "opportuna". La lunghezza del filtro è data dal numero di campioni per simbolo per il numero di intervalli di simbolo su cui $h_{\mathrm{RCR}}(t)$ è significativo). Usanto sia in trasmissione che in ricezione il filtro ottenuto, ripetete le osservazioni dell'Esercizio 1.

Esercizio 3.

Disegnate qualitativamente gli spettri di ampiezza degli impulsi rettangolari e dell'impulso ottenuto al punto precedente (usate le funzioni `fft`, `plot` e `semilogy` di Matlab). Quale dei due impulsi ha banda minore?

Esercizio 4.

Ripetete i due punti precedenti usando fattori di roll-off $\alpha = 0.2$ e $\alpha = 0.8$. Che cosa osservate?

Esercizio 5.

La risposta all'impulso di un semplice filtro passa basso è del tipo

$$h(t) = He^{-t/\tau}u(t)$$

dove H è un fattore di ampiezza e τ è la costante di tempo del filtro. Calcolate $H(f)$ e stimate la banda di questo filtro, in funzione di τ. Considerate $\tau = 1/4$ (l'intervallo di simbolo è sempre normalizzato come $T = 1$). Campionando con un numero opportuno di campioni per simbolo, generate un filtro FIR che approssima $h(t)$. In fine, ripetete i gli esercizi 1 e 2 per $M = 2$, usando in trasmissione i filtri rettangolari e radice quadrata di coseno rialzato ottenuti in precedenza e in ricezione il filtro passa basso che avete generato. Che diagramma ad occhio ossevate? Esiste un istante di tempo privo di ISI?

Esercizio 6.

Con riferimento all'esercizio precedente, provate a variare la costante di tempo τ del filtro passa basso e osservate il diagramma ad occhio. Cosa notate quando τ aumenta? E quando τ diminuisce? Sapreste interpretare i risultati?

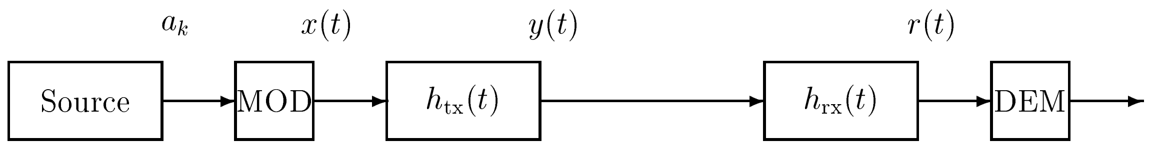


Figura 11.1 Modello del canale di trasmissione.

Parte II

Soluzioni degli esercizi

Capitolo 1

Richiami di teoria dei segnali (soluzioni)

Soluzione esercizio 1.1

Per applicare il procedimento di Gram-Schmidt si pone $v_1(t) = s_1(t)$ e se ne calcola la norma:

$$\| v_1(t) \| = \sqrt{\int_0^T | v_1(t) |^2 \, dt} = \sqrt{\int_0^{2T/3} dt} = \sqrt{\frac{2T}{3}}$$

Il primo vettore della nuova base ortonormale risulta quindi essere:

$$\psi_1(t) = \frac{v_1(t)}{\| v_1(t) \|} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\frac{2T}{3}}}$$

Si calcola poi:

$$v_2(t) = s_2(t) - < s_2(t), \psi_1(t) > \psi_1(t)$$

Essendo:

$$< s_2(t), \psi_1(t) > = \int_0^T s_2(t)\psi_1(t)dt = \int_{2T/3}^T \psi_1(t)dt = 0$$

si ha:

$$v_2(t) = s_2(t)$$

La norma del vettore $v_2(t)$ risulta essere:

$$\| v_2(t) \| = \sqrt{\int_0^T | v_2(t) |^2 \, dt} = \int_{2T/3}^T dt = \sqrt{\frac{T}{3}}$$

quindi si può scrivere:

$$\psi_2(t) = \frac{v_2(t)}{\| v_2 \|} = \frac{s_2(t)}{\sqrt{\frac{T}{3}}}$$

Procedendo come prima, si calcolano gli altri vettori della base ortonormale:

$$v_3(t) = s_3(t) - < s_3(t), \psi_1(t) > \psi_1(t) - < s_3(t), \psi_2(t) > \psi_2(t),$$

dove:

$$< s_3(t), \psi_1(t) > = \int_0^T s_3(t)\psi_1(t)dt = \int_0^{2T/3} s_3(t)\frac{s_1(t)}{\sqrt{\frac{2T}{3}}}\,dt = -\frac{2T}{3\sqrt{\frac{2T}{3}}} = -\sqrt{\frac{2T}{3}}$$

e

$$< s_3(t), \psi_2(t) > = \int_0^T s_3(t)\psi_2(t)dt = \int_{2T/3}^T s_3(t)\frac{s_2(t)}{\sqrt{\frac{T}{3}}}\,dt = \frac{T}{3\sqrt{\frac{2T}{3}}} = \sqrt{\frac{T}{3}}$$

Risulta quindi:

$$v_3(t) = s_3(t) + \frac{2T s_1(t)}{3\sqrt{\frac{2T}{3}}\sqrt{\frac{2T}{3}}} - \frac{T s_2(t)}{3\sqrt{\frac{T}{3}}\sqrt{\frac{T}{3}}} = s_3(t) + s_1(t) - s_2(t) = 0$$

Proseguendo con il procedimento si calcola:

$$v_4(t) = s_4(t) - < s_4(t), \psi_1(t) > \psi_1(t) - < s_4(t), \psi_2(t) > \psi_2(t) - < s_4(t), \psi_3(t) > \psi_3(t)$$

Poiché si ha:

$$\begin{aligned} \psi_3(t) &= 0 \\ < s_4(t), \psi_1(t) > &= \int_0^T s_4(t)\psi_1(t)dt = \int_0^{T/3} \frac{dt}{\sqrt{\frac{2T}{3}}} + \int_{T/3}^{2T/3} \frac{dt}{\sqrt{\frac{2T}{3}}} = \sqrt{\frac{2T}{3}} \\ < s_4(t), \psi_2(t) > &= \sqrt{\frac{T}{3}} \end{aligned}$$

si ricava agevolmente che $\psi_4(t) = s_4(t) - s_1(t) - s_2(t) = 0$; la base ortonormale trovata con il procedimento di Gram-Schmidt risulta costituita da due soli elementi: $\psi_1(t), \psi_2(t)$ Valgono, inoltre, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sqrt{\frac{2T}{3}}\psi_1(t) \\ s_2(t) &= \sqrt{\frac{T}{3}}\psi_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3(t) &= -\sqrt{\frac{2T}{3}}\psi_1(t) + \sqrt{\frac{T}{3}}\psi_2(t) \\ s_4(t) &= \sqrt{\frac{2T}{3}}\psi_1(t) + \sqrt{\frac{T}{3}}\psi_2(t) \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 1.2

Per i segnali $s_i(t)$ con $i = 1,2,\ldots 7$ è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= Ap_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \left[\frac{2\pi}{7}(i-1) + \frac{\pi}{7}\right]\right) \\ &= A\cos\left(2\pi f_0 t + \left[\frac{2\pi}{7}(i-1) + \frac{\pi}{7}\right]\right) \qquad\qquad t \in (0,T) \end{aligned}$$

Sviluppando ancora si ottiene:

$$s_i(t) = \left(A\cos\left[\frac{2\pi}{7}(i-1) + \frac{\pi}{7}\right]\right)\cos 2\pi f_0 t - \left(A\sin\left[\frac{2\pi}{7}(i-1) + \frac{\pi}{7}\right]\right)\sin 2\pi f_0 t$$

L'ipotesi $f_0 T >> 1$ consente di considerare i segnali $\cos 2\pi f_0 t$ e $-\sin 2\pi f_0 t$ approssimativamente ortogonali, poiché:

$$-\int_0^T \cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t)\,dt = -\frac{1}{8\pi f_0}\left[1 - \cos 4\pi f_0 T\right] \cong 0$$

mentre:

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t)dt &= \frac{T}{2} + \frac{1}{8\pi f_0 t}\sin 4\pi f_0 T \cong \frac{T}{2} \\ \int_0^T \sin^2(2\pi f_0 t)dt &= \frac{T}{2} - \frac{1}{8\pi f_0 t}\sin 4\pi f_0 T \cong \frac{T}{2} \end{aligned}$$

Lo spazio dei segnali $\{s_i(t)\}_{i=1}^{7}$ ha quindi due dimensioni; si noti inoltre che se $f_0 = \frac{n}{2T}$ allora i segnali sono esattamente ortogonali. A questo punto è necessario trovare due segnali ortonormali a partire da: $\cos 2\pi f_0 t$ e $-\sin 2\pi f_0 t$. Sempre tenendo conto dell'ipotesi $f_0 T >> 1$ è sufficiente considerare:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{\cos 2\pi f_0 t}{\|\cos 2\pi f_0 t\|} = \frac{\cos 2\pi f_0 t}{\sqrt{\int_0^T \cos^2 2\pi f_0 t dt}} = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos 2\pi f_0 t \\ \psi_2(t) &= -\frac{\sin 2\pi f_0 t}{\|-\sin 2\pi f_0 t\|} = -\frac{\sin 2\pi f_0 t}{\sqrt{\int_0^T \sin^2 2\pi f_0 t dt}} = -\sqrt{\frac{2}{T}}\sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

Scegliendo come base ortonormale $\{\psi_1(t),\psi_2(t)\}$ con $t \in (0,T)$, i segnali $s_i(t)_{i=1}^7$ sono rappresentabili come:

$$s_i(t) = A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos\varphi_k\,\psi_1(t) + A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin\,\varphi_k\psi_2(t)$$

dove $\varphi_k = \frac{2\pi}{7}(i-1) + \frac{\pi}{7}$.
In questo modo i segnali sul piano saranno punti appartenenti ad una circonferenza di raggio $r = A\sqrt{\frac{T}{2}}$. Per l'energia media è necessario prima calcolare l'energia associata a ciascun segnale. Rappresentando il generico segnale $s_i(t)$ come vettore a due componenti nella base $\{\psi_1(t),\psi_2(t)\}$, cioè $s_i(t) = (s_{i1}(t),s_{i2}(t))$ risulta:

$$\mathcal{E}_i = \sum_{k=1}^{2} s_{ik}^2(t) = \parallel s_i(t) \parallel^2 = A^2\frac{T}{2}\cos^2\varphi_k + A^2\frac{T}{2}\sin^2\varphi_k = A^2\frac{T}{2}$$

Per quanto riguarda il segnale $s_0(t)$ è evidente che l'energia ad esso associata è nulla. L'energia media dell'insieme dei segnali risulterà quindi essere:

$$\mathcal{E}_{media} = \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{7}\mathcal{E}_i = \frac{1}{8}\left[7\cdot A^2\frac{T}{2} + 1\cdot 0\right] = \frac{7}{16}A^2T$$

La distanza minima è definita come $d_{min} = \min_{i,j} \quad d_{ij}$, dove $d_{ij} = d(s_i,s_j)$ rappresenta, appunto, la distanza tra il segnale $s_i(t)$ e il segnale $s_j(t)$. Dalla figura è evidente che:

$$\begin{aligned} d_{i,0} &= A\sqrt{\frac{T}{2}} \qquad\qquad i = 1,\ldots 7 \\ d_{i,i+1} &= 2r\sin(\frac{\pi}{7}) = 2A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin(\frac{\pi}{7}) = A\sqrt{\frac{T}{2}}\cdot 0.8678 \qquad\qquad i = 1,..6 \end{aligned}$$

quindi si ha: $d_{min} = A\sqrt{\frac{T}{2}}\cdot 0.8678$

Soluzione esercizio 1.3

Procedendo come nell'esercizio precedente per i segnali $\{s_i(t)\}_{i=0}^3$ si può scrivere:

$$s_i(t) = \left[A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos\left(\frac{\pi i}{2}\right)\right]\psi_1(t) + \left[A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{\pi i}{2}\right)\right]\psi_1(t)$$

mentre per i segnali $\{s_i(t)\}_{i=4}^7$ si ha:

$$s_i(t) = \left[\sqrt{2}A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}(i-4) + \frac{\pi}{4}\right)\right]\psi_2(t) + \left[\sqrt{2}A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}(i-4) + \frac{\pi}{4}\right)\right]\psi_2(t)$$

dove $\{\psi_1(t),\psi_2(t)\}$ sono gli stessi vettori della base ortonormale trovata precedentemente. Per completezza si riporta la loro espressione valida per $t \in (0,T)$:

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_0 t \\
\psi_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_0 t
\end{aligned}$$

I segnali $s_i(t)$ per $i = 0,\ldots,3$ sono, dunque, rappresentabili sul piano come punti appartenenti a una circonferenza di raggio $r = A\sqrt{\frac{T}{2}}$, mentre quelli per $i = 4,\ldots,7$ come punti appartenenti a una circonferenza di raggio $r = A\sqrt{T}$.

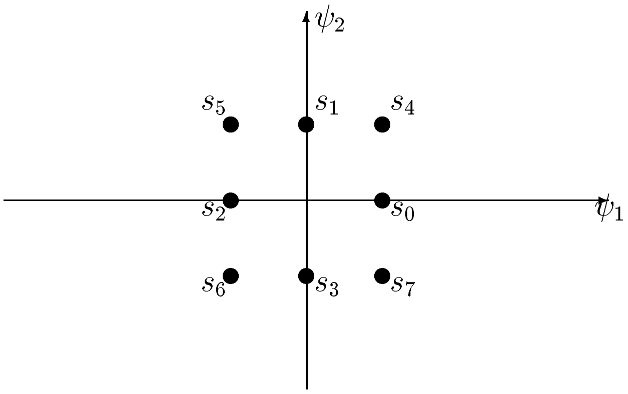


Figura 1.1 Costellazione dei segnali $\{s_i(t)\}_{i=0}^{7}$

Per quanto riguarda le energie dei segnali è evidente che:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i &= \sum_{k=1}^{2} s_{ik}^2(t) = \| s_i(t) \|^2 = A^2 \frac{T}{2} \cos^2\left(\frac{\pi i}{2}\right) + A^2 \frac{T}{2} \sin^2\left(\frac{\pi i}{2}\right) = A^2 \frac{T}{2} \qquad i = 0,..3 \\
\mathcal{E}_i &= \sum_{k=1}^{2} s_{ik}^2(t) = \| s_i(t) \|^2 = 2A^2 \frac{T}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}(i-4) + \frac{\pi}{4}\right) + 2A^2 \frac{T}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(i-4) + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= A^2 T \qquad i = 4,..7
\end{aligned}$$

L'energia media dell'insieme dei segnali risulta essere:

$$\mathcal{E}_{media} = \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{7} \mathcal{E}_i = \frac{1}{8}\left[4 \cdot A^2 \frac{T}{2} + 4 \cdot A^2 T\right] = \frac{3}{4} A^2 T$$

Dalla figura è anche evidente che la distanza minima è pari a: $d_{min} = A\sqrt{\frac{T}{2}}$

Soluzione esercizio 1.4

Anche in questo esercizio si possono scrivere i segnali $s_i(t)$ nella seguente forma:

$$\begin{aligned}
s_i(t) &= Ap_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \left[\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{4}\right]\right) = \\
&= Ap_T(t)\left[\cos 2\pi f_0 t \cdot \cos\left(\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 2\pi f_0 t \cdot \sin\left(\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \\
&= A\sqrt{\frac{T}{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\psi_1(t) + \sin\left(\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\psi_2(t)\right] = \\
&= A\sqrt{\frac{T}{2}}\left[\cos\varphi_k \psi_1(t) + \sin\varphi_k \psi_2(t)\right] \qquad t \in (0,T)
\end{aligned}$$

dove $\varphi_k = \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi}{4}$ con $i = 0,\ldots,3$. Operando in modo analogo per i segnali $\{s_i(t)\}_{i=4}^{7}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
s_i(t) &= \frac{1+\sqrt{3}}{2}A\sqrt{T}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}(i-4)\right]\psi_1(t) + \sin\left[\frac{\pi}{2}(i-4)\right]\psi_2(t)\right\} = \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{2}A\sqrt{T}\left[\cos\theta_k \psi_1(t) + \sin\theta_k \psi_2(t)\right] \qquad t \in (0,T)
\end{aligned}$$

dove $\theta_k = \frac{\pi}{2}(i-4)$ con $i = 4,..7$.

È, dunque, possibile rappresentare i segnali $\{s_i(t)\}_{i=0}^{3}$ con punti appartenenti a una circonferenza di raggio $r = A\sqrt{\frac{T}{2}}$, mentre i punti corrispondenti ai segnali $\{s_i(t)\}_{i=4}^{7}$ apparterranno ad una circonferenza di raggio $r = \frac{1+\sqrt{3}}{2}A\sqrt{T}$.

Per il calcolo dell'energia di ciascun segnale e per l'energia media dell'insieme dei segnali, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i &= A^2\frac{T}{2} \qquad i = 0,..3 \\
\mathcal{E}_i &= \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4}A^2 T \quad i = 4,..7 \\
\mathcal{E}_{media} &= \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{7}\mathcal{E}_i = \frac{1}{8}\left[4 \cdot A^2\frac{T}{2} + 4 \cdot \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4}A^2 T\right] = \\
&= \frac{2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2}{8}A^2 T = 1.18 \cdot A^2 T
\end{aligned}$$

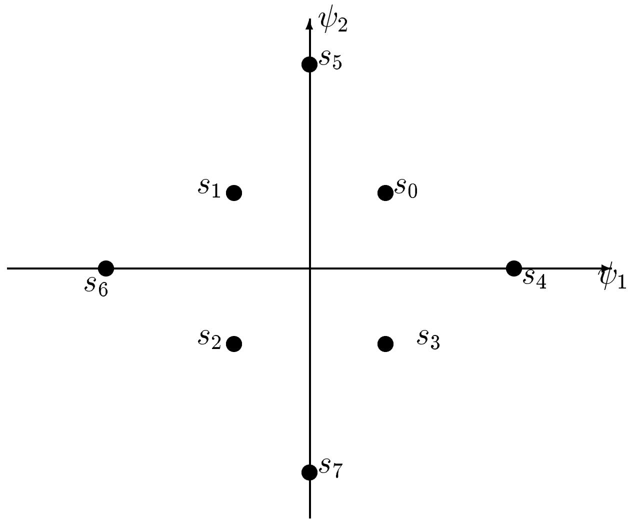


Figura 1.2 Costellazione dei segnali $\{s_i(t)\}_{i=0}^{7}$

Per quanto riguarda la distanza minima è necessario considerare due tipi di distanze: quella, ad esempio, tra il segnale $s_0(t)$ e $s_4(t)$ e quella tra il segnale $s_0(t)$ e $s_1(t)$. Si ha:

$$\begin{aligned} d_{0,4} &= \sqrt{\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}A\sqrt{T} - \frac{1}{2}A\sqrt{T}\right]^2 + \frac{1}{4}A^2T} = \\ &= \sqrt{\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]}A\sqrt{T} = A\sqrt{T} \\ d_{0,1} &= A\sqrt{T} \end{aligned}$$

dunque: $d_{min} = A\sqrt{T}$.

Soluzione esercizio 1.5

Per i segnali $\{s_i(t)\}_{i=0}^{1}$ si può scrivere:

$$\begin{aligned} s_i(t) &= Ap_T(t)\cos(2\pi f_0 t + \pi i) = \\ &= Ap_T(t)\left[\cos 2\pi f_0 t \cdot \cos \pi i - \sin 2\pi f_0 t \cdot \sin \pi i\right] = \\ &= A\sqrt{\frac{T}{2}}\cos(\pi i)\,\psi_1(t) \qquad\qquad t \in (0,T) \end{aligned}$$

Analogamente, per i segnali $\{s_i(t)\}_{i=1}^{3}$ si ha:

$$\begin{aligned}
s_i(t) &= \sqrt{3}Ap_T(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \left[\pi(i-2)+\frac{\pi}{2}\right]\right) = \\
&= \sqrt{3}Ap_T(t)\left\{\cos 2\pi f_0 t \cdot \cos\left[\pi(i-2)+\frac{\pi}{2}\right] - \sin 2\pi f_0 t \cdot \sin\left[\pi(i-2)+\frac{\pi}{2}\right]\right\} \\
&= \sqrt{3}A\sqrt{\frac{T}{2}}\sin\left[\pi(i-2)+\frac{\pi}{2}\right]\psi_2(t) \qquad t \in (0,T)
\end{aligned}$$

L'insieme dei segnali è, dunque, rappresentabile come:

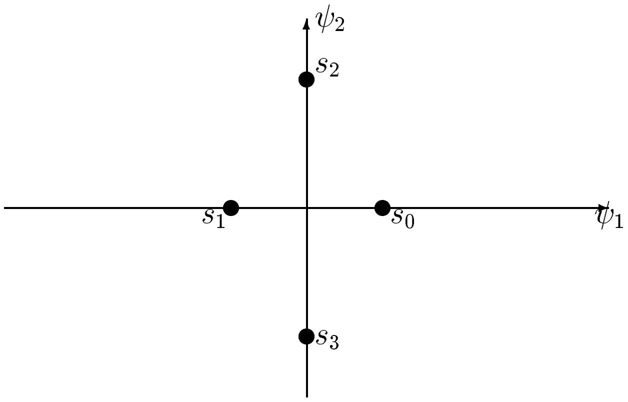


Figura 1.3 Costellazione dei segnali $\{s_i(t)\}_{i=0}^{3}$

L'energia di ciascun segnale sarà:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i &= A^2\frac{T}{2} \qquad i = 0{,}1 \\
\mathcal{E}_i &= 3A^2\frac{T}{2} \quad i = 2{,}3
\end{aligned}$$

Procedendo come negli esercizi precedenti, si calcola l'energia media dell'insieme dei segnali:

$$\mathcal{E}_{media} = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{4}\mathcal{E}_i = \frac{1}{4}\left[2\cdot A^2\frac{T}{2} + 2\cdot 3A^2\frac{T}{2}\right] = A^2T$$

Si calcolino ora le distanze tra i vari segnali:

$$\begin{aligned}
d_{0,1} &= 2A\sqrt{\frac{T}{2}} = \sqrt{2}A\sqrt{T} \\
d_{2,3} &= 2\sqrt{3}A\sqrt{\frac{T}{2}} = \sqrt{6}A\sqrt{T}
\end{aligned}$$

$$d_{0,2} = \sqrt{A^2\frac{T}{2} + 3A^2\frac{T}{2}} = \sqrt{2}A\sqrt{T}$$

Risulta, dunque: $d_{min} = \sqrt{2}A\sqrt{T}$

Soluzione esercizio 1.6

Procedendo come negli esercizi precedenti, i segnali $\{s_i(t)\}_{i=0}^{2}$ possono essere riscritti come:

$$\begin{aligned} s_i &= Ap_T(t)\left[\cos\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\cdot\cos 2\pi f_0 t - \sin\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\cdot\sin 2\pi f_0 t\right] = \\ &= A\sqrt{\frac{T}{2}}\left[\cos\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\,\psi_1(t) + \sin\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\,\psi_2(t)\right] \end{aligned}$$

dove i vettori $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ formano la base ortonormale, valida per $t \in (0,T)$, trovata in precedenza:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}}\cos 2\pi f_0 t \\ \psi_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}}\sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il segnale $s_3(t)$ si ha:

$$s_3(t) = \sqrt{2}Ap_T(t)\cos\left[2\pi\left(f_0 + \frac{1}{T}\right)t\right]$$

Come si può notare dall'espressione di $s_3(t)$, i versori $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ non sono utilizzabili per rappresentare tale segnale; è dunque necessario trovare un ulteriore versore $\psi_3(t)$ che, insieme a $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$, formi una base ortonormale a tre dimensioni adatta a rappresentare i segnali $\{s_i(t)\}_{i=0}^{3}$. A tale proposito, si consideri il vettore:

$$v_3(t) = \cos\left[2\pi\left(f_0 + \frac{1}{T}\right)t\right]$$

Tenendo presente l'ipotesi $f_0 t \gg 1$ è facile verificare che il versore ad esso associato ha espressione:

$$\psi_3(t) = \frac{v_3(t)}{\| v_3(t) \|} = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\left[2\pi\left(f_0 + \frac{1}{T}\right)t\right]$$

Utilizzando tale versore, il segnale $s_3(t)$ è esprimibile come:

$$s_3(t) = \sqrt{2}Ap_T(t)\cos\left[2\pi\left(f_0 + \frac{1}{T}\right)t\right] = A\sqrt{T}\,\psi_3(t)$$

A questo punto è necessario verificare che i tre versori $\{\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t)\}$ costituiscano effettivamente una base ortonormale, cioè siano tali per cui:

$$< \psi_i,\psi_j >= \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ 1 & \text{per } i = j \end{cases}$$

Nei precedenti esercizi è già stata verificata l'ortonormalità tra $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$; si vuole ora verificare che tale proprietà sussiste anche tra $\{\psi_1(t),\psi_3(t)\}$ e $\{\psi_2(t),\psi_3(t)\}$. Si calcoli :

$$\begin{aligned}
< \psi_1,\psi_3 > &= \frac{2}{T}\int_0^T \cos 2\pi f_0 t \cdot \cos\left[2\pi\left(f_0 + \frac{1}{T}\right)t\right] dt = \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{1}{2}\int_0^T \cos\left(4\pi f_0 + \frac{2\pi}{T}\right)t\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^T = 0
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
< \psi_2,\psi_3 > &= -\frac{2}{T}\int_0^T \sin 2\pi f_0 t \cdot \cos\left[2\pi\left(f_0 + \frac{1}{T}\right)t\right] dt = \\
&= -\frac{2}{T}\left[\frac{1}{2}\int_0^T \sin\left(4\pi f_0 + \frac{2\pi}{T}\right)t\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)t\, dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^T = 0
\end{aligned}$$

Per rappresentare i segnali si utilizzerà la base costituita da $\{\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t)\}$ che, come è stato appena verificato, risulta ortonormale: valgono, dunque, le relazioni scritte in precedenza per rappresentare i segnali $\{s_i(t)\}_{i=0}^3$ in funzione di $\{\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t)\}$. In particolare, i segnali $\{s_i(t)\}_{i=0}^2$ giacciono nel piano $\{\psi_1(t),\psi_2(t)\}$ e appartengono a una circonferenza di raggio $r = A\sqrt{\frac{T}{2}}$, mentre il segnale $s_3(t)$ giace sull'asse $\psi_3(t)$; è, inoltre, facile verificare che geometricamente formano un tetraedro regolare. L'energia associata a ciascun segnale risulta:

$$\mathcal{E}_i = \sum_{k=1}^{3} s_{ik}^2(t) =\| s_i(t) \|^2= \begin{cases} A^2\frac{T}{2} & \text{per } i = 0\ldots 2 \\ \\ A^2 T & \text{per } i = 3 \end{cases}$$

Per quanto riguarda l'energia media si ha:

$$\mathcal{E}_{media} = \frac{1}{4}\left(3A^2\frac{T}{2} + A^2T\right) = \frac{5}{8}A^2T$$

Per il calcolo della distanza minima è necessario considerare due tipi di distanze:

$$\begin{aligned} d\left(s_0(t),s_1(t)\right) &= \sqrt{\left(A\sqrt{\frac{T}{2}}+\frac{1}{2}A\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2+\frac{3}{4}A^2\frac{T}{2}} = A\sqrt{\frac{3T}{2}} \\ d\left(s_0(t),s_3(t)\right) &= \sqrt{A^2\frac{T}{2}+A^2T} = A\sqrt{\frac{3T}{2}} \end{aligned}$$

È evidente che: $d_{min} = A\sqrt{\frac{3T}{2}}$

Soluzione esercizio 1.7

Si consideri l'espressione dei segnali $s_{i,k}(t)$; essi possono essere riscritti come:

$$\begin{aligned} s_{i,k} &= Ap_T(t)\cos\left[\pi i + 2\pi\left(f_0+\frac{k}{2T}\right)t\right] = \\ &= Ap_T(t)\cos(\pi i)\cdot\cos 2\pi\left(f_0+\frac{k}{2T}\right)t - \sin(\pi i)\cdot\sin 2\pi\left(f_0+\frac{k}{2T}\right)t = \\ &= Ap_T(t)\cos(\pi i)\cdot\cos 2\pi\left(f_0+\frac{k}{2T}\right)t \end{aligned}$$

Analizzando i vari casi per $i = 0,1$ e $k = 0\ldots2$ si ha:

$$s_{i,k}(t) = \begin{cases} \pm Ap_T(t)\cos 2\pi f_0 t & \text{per } i=0,1 \text{ e } k=0 \\ \pm Ap_T(t)\cos 2\pi\left(f_0+\frac{1}{2T}\right)t & \text{per } i=0,1 \text{ e } k=1 \\ \pm Ap_T(t)\cos 2\pi\left(f_0+\frac{1}{T}\right)t & \text{per } i=0,1 \text{ e } k=2 \end{cases}$$

Dalle precedenti relazioni risulta evidente che la base formata dai soli vettori $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ non è sufficiente a rappresentare i segnali $s_{i,k}(t)$. Si considerino a questo proposito i vettori :

$$\psi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\left[2\pi\left(f_0+\frac{k}{2T}\right)t\right] \quad \text{,con } t\in(0,T) \text{ e } k=0\ldots2$$

A questo punto è necessario verificare che tali vettori formino una base ortonormale, cioè siano tali per cui:

$$<\psi_k,\psi_{k'}>= \begin{cases} 0 & \text{per } k\neq k' \\ 1 & \text{per } k=k' \end{cases}$$

Si ha:

$$<\psi_k,\psi_{k'}> = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\left[2\pi\left(f_0+\frac{k}{2T}\right)t\right]\cdot\cos\left[2\pi\left(f_0+\frac{k'}{2T}\right)t\right]dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^T \cos\left[2\pi\left(2f_0+\frac{k+k'}{2T}\right)t\right]dt + \int_0^T \cos\left[2\pi\frac{k-k'}{2T}t\right]dt\right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{T}\left[\frac{T}{\pi(k-k')}\sin\left(\frac{\pi}{T}(k-k')\,t\right)\right]_0^T = 0 & \text{per } k \neq k' \\ \frac{1}{T}\int_0^T dt = 1 & \text{per } k = k' \end{cases}$$

Si noti che si è utilizzata l'ipotesi $f_oT \gg 1$ per poter affermare che

$$\int_0^T \cos\left[2\pi\left(2f_0+\frac{k+k'}{2T}\right)t\right]dt \cong 0$$

I segnali $s_{i,k}(t)$ possono essere rappresentati in uno spazio a tre dimensioni mediante i vettori ortonormali $\{\psi_k(t)\}_{k=1}^3$; risulta quindi:

$$s_{i,k}(t) = \begin{cases} A\sqrt{\frac{T}{2}}\cdot\psi_1(t) & i=0 \text{ e } k=0 \\ -A\sqrt{\frac{T}{2}}\cdot\psi_1(t) & i=1 \text{ e } k=0 \\ A\sqrt{\frac{T}{2}}\cdot\psi_2(t) & i=0 \text{ e } k=1 \\ -A\sqrt{\frac{T}{2}}\cdot\psi_2(t) & i=1 \text{ e } k=1 \\ A\sqrt{\frac{T}{2}}\cdot\psi_3(t) & i=0 \text{ e } k=2 \\ -A\sqrt{\frac{T}{2}}\cdot\psi_3(t) & i=1 \text{ e } k=2 \end{cases}$$

Avendo espresso i segnali in questo modo, il calcolo dell'energia di ciascuno di essi risulta pressoché immediato:

$$\mathcal{E}_i = \sum_{k=1}^{3} s_{ik}^2(t) = \parallel s_i(t) \parallel^2 = A^2\frac{T}{2}$$

L'energia media dell'insieme dei segnali risulta pari a:

$$\mathcal{E}_{media} = \frac{1}{6}\left(6A^2\frac{T}{2}\right) = A^2\frac{T}{2}$$

Per quanto riguarda il calcolo della distanza minima si considerino i seguenti tipi di distanze (le altre distanze sono riconducibili a queste per la simmetria dell'insieme dei segnali):

$$\begin{aligned} d\left(s_{0,1}(t), s_{1,1}(t)\right) &= 2A\frac{T}{2} = \sqrt{2}A\sqrt{T} \\ d\left(s_{0,1}(t), s_{0,2}(t)\right) &= \sqrt{A^2\frac{T}{2}+A^2\frac{T}{2}} = A\sqrt{T} \end{aligned}$$

Risulta, quindi: $d_{min} = A\sqrt{T}$

Soluzione esercizio 1.8

Sia $\lambda \in \Re$; dati due vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, si ha

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y} \|^2 &= < \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y} >= \\ &= \| \boldsymbol{x} \|^2 + 2\lambda < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > + \lambda^2 \| \boldsymbol{y} \|^2 \end{aligned}$$

Poché $\| \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y} \|^2 \geq 0$ per ogni $\lambda \in \Re$, il discriminante del trinomio in λ precedente deve essere minore o uguale a zero. Dunque:

$$| < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > |^2 - \| \boldsymbol{x} \|^2 \| \boldsymbol{y} \|^2 \leq 0$$

da cui segue la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$| < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > |^2 \leq < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >< \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} >$$

essendo:

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{x} \|^2 &= < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} > \\ \| \boldsymbol{y} \|^2 &= < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} > \end{aligned}$$

La condizione che verifica l'uguaglianza è:

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y} \text{ con } \alpha \in \Re \,,$$

infatti, sostituendo nella disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, si ottiene:

$$|\alpha|^2 \, | < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} > |^2 - |\alpha|^2 \, | < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} > | = 0$$

Per ottenere la diseguaglianza valida per gli integrali, si scriva:

$$\begin{aligned} \int_a^b x(t) y^*(t) \, dt &= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{y}(t_i)^* \boldsymbol{x}(t_i) = \\ &= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} < \boldsymbol{y}_N, \boldsymbol{x}_N > \end{aligned}$$

dove:

$$t_i = i \frac{b-a}{N} + a \quad i = 0 \ldots N-1$$

e:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_N &= (y(t_0), y(t_1) \ldots y(t_{N-1}))^T \\ \boldsymbol{x}_N &= (x(t_0), x(t_1) \ldots x(t_{N-1}))^T \end{aligned}$$

La diseguaglianza di Cauchy-Schwartz per i vettori appena definiti diviene:

$$| < \boldsymbol{y}_N, \boldsymbol{x}_N > |^2 \leq < \boldsymbol{y}_N, \boldsymbol{y}_N >< \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_N >$$

Dividendo ambo i membri per $\frac{1}{N^2}$ e facendo il limite per $N \to \infty$ si ottiene la diseguaglianza valida per gli integrali.

Soluzione esercizio 1.9

'Si rappresenti innanzitutto la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$:

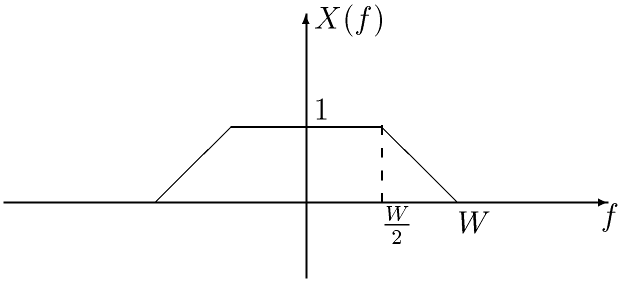


Figura 1.4 Spettro $X(f)$ del segnale $x(t)$

Lo schema a blocchi della trasformazione $y(t)$ è:

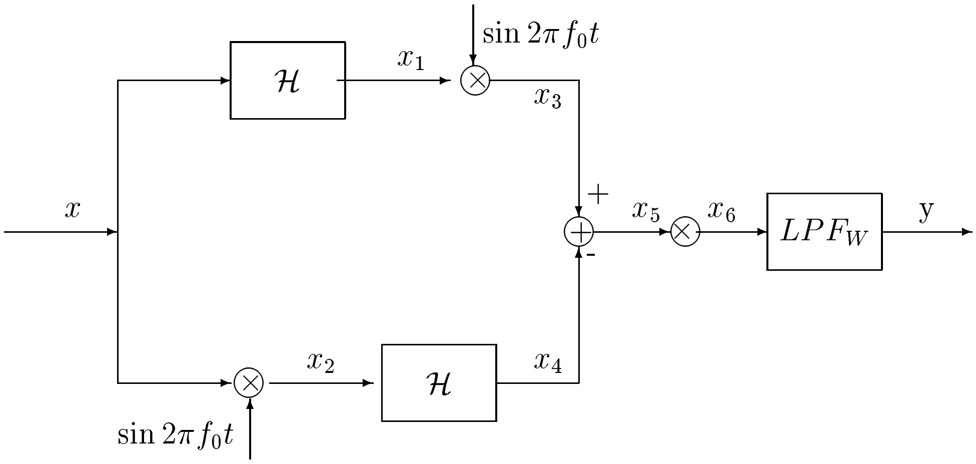


Figura 1.5 Schema a blocchi della trasformazione $y(t)$

Per determinare analiticamente $y(t)$ è molto più comodo lavorare nel dominio della frequenza; dalla figura dello schema a blocchi risulta evidente che:

$$x_1(t) = \hat{x}(t)$$

Nel dominio della frequenza questo corrisponde a scrivere:

$$X_1(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f) \cdot X(f)$$

Per quanto riguarda $x_2(t)$ si ha:

$$x_2(t) = x_1(t) \cdot \sin 2\pi f_0 t$$

Come ben noto, il prodotto nel dominio del tempo corrisponde a un convoluzione nel dominio della frequenza; per il segnale $x_2(t)$ si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned} X_2(f) &= \mathcal{F}\{x(t)\} * \mathcal{F}\{\sin 2\pi f_0 t\} = X(f) * \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - f_0\right) - \delta\left(f + f_0\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2j}\left[X\left(f - f_0\right) - X\left(f + f_0\right)\right] \end{aligned}$$

Dalla rappresentazione grafica di $X(f)$, risulta evidente che la trasformata di Fourier di $x_2(t)$ ha il seguente andamento:

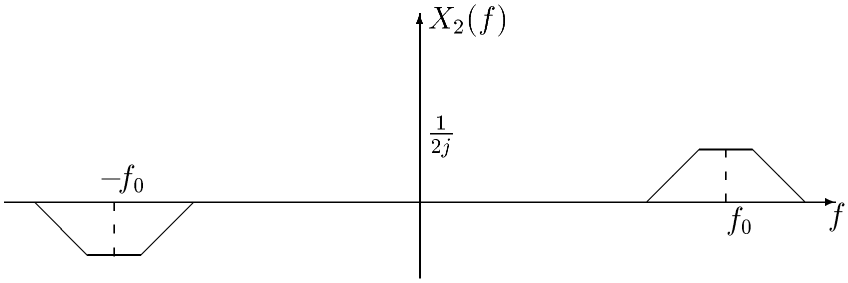


Figura 1.6 Spettro $X_2(f)$ del segnale $x_2(t)$

Procedendo nell'analisi dello schema a blocchi, si consideri il segnale:

$$x_3(t) = x_1(t) \cdot \sin 2\pi f_0 t = \hat{x}(t) \cdot \sin 2\pi f_0 t$$

la cui trasformata di Fourier vale:

$$\begin{aligned} X_3(f) &= \mathcal{F}\{x_1(t)\} * \mathcal{F}\{\sin 2\pi f_0 t\} = \\ &= \frac{1}{2j}\left[X_1\left(f - f_0\right) - X_1\left(f + f_0\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2j}\left[-j \operatorname{sgn}\left(f - f_0\right) \cdot X\left(f - f_0\right) + j\operatorname{sgn}\left(f - f_0\right) \cdot X\left(f - f_0\right)\right] = \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(f - f_0\right) \cdot X\left(f - f_0\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(f - f_0\right) \cdot X\left(f - f_0\right) \end{aligned}$$

Per una successiva analisi conviene rappresentare graficamente anche $X_3(f)$:
La trasformata di Fourier del segnale $x_4(t) = \hat{x}_2(t)$ risulta essere:

$$\begin{aligned} X_4(f) &= \mathcal{F}\{\hat{x}_2(t)\} = -j\operatorname{sgn}(f) \cdot X_2(f) = \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(f) \cdot X\left(f - f_0\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(f) \cdot X\left(f + f_0\right) \end{aligned}$$

La rappresentazione grafica è data in figura.

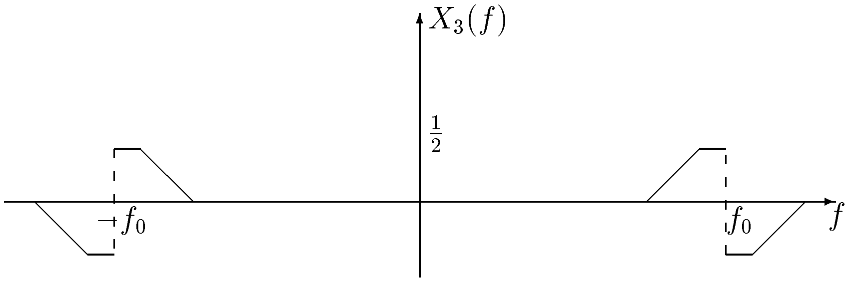


Figura 1.7 Spettro $X_3(f)$ del segnale $x_3(t)$

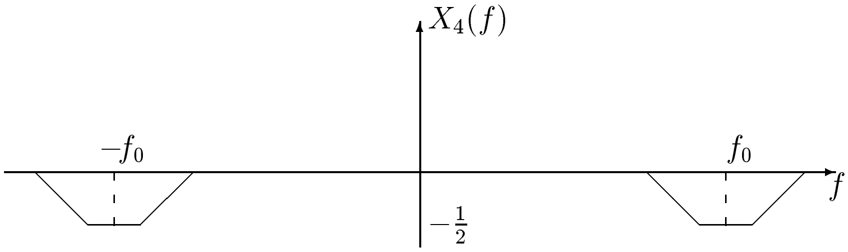


Figura 1.8 Spettro $X_4(f)$ del segnale $x_4(t)$

Il segnale $x_5(t)$ è dato dalla differenza tra il segnale $x_3(t)$ e il segnale $x_4(t)$; per il calcolo della sua trasformata di Fourier conviene lavorare graficamente piuttosto che analiticamente. Si riporta quindi il grafico di $X_5(f) = X_3(f) - X_4(f)$:

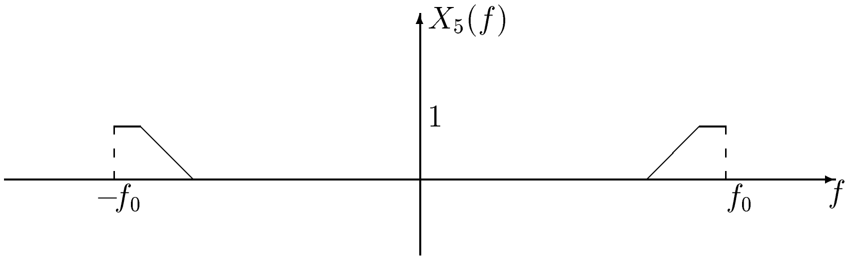


Figura 1.9 Spettro $X_5(f)$ del segnale $x_5(t)$

Dalla struttura dello schema a blocchi, risulta:

$$x_6(t) = x_5(t) \cdot 2 \cos 2\pi f_0 t$$

La trasformata di Fourier vale:

$$\begin{aligned} X_6(f) &= X_5(f) * [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] = \\ &= X_5(f - f_0) + X_5(f + f_0) \end{aligned}$$

Anche in questo caso, per una più facile interpretazione dei risultati è conveniente far riferimento al diagramma della trasformata di Fourier del segnale $x_6(t)$:

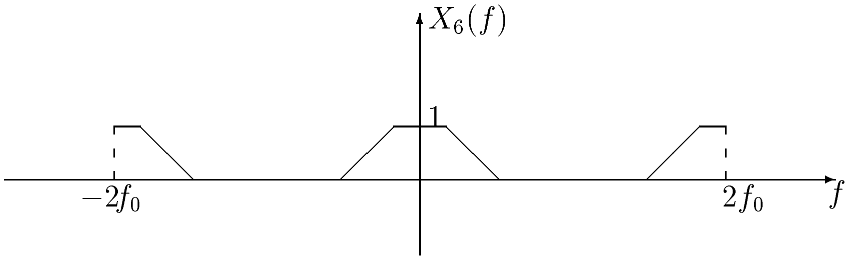


Figura 1.10 Spettro $X_6(f)$ del segnale $x_6(t)$

L'ultimo passaggio della trasformazione consiste nel filtraggio passabasso ideale con banda W; dal grafico precedente risulta evidente che il risultato di tale operazione è:

$$Y(f) = X(f)$$

Antitrasformando e tornando al dominio del tempo si può ricavare l'espressione analitica della trasformazione $y(t)$:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(f)\right\} = x(t)$$

Soluzione esercizio 1.10

La minima frequenza di campionamento per avere perfetta ricostruzione, detta *frequenza di Nyquist*, è:

$$f_{c,min} = 2B = 2 \cdot 6000 = 12\,\text{kHz}$$

Nel caso in cui si richieda una banda di guardia di 1 kHz, la minima frequenza di campionamento diventa:

$$f_{c,min} = 2(B + 11\ \text{kHz}) = 14\,\text{kHz}$$

Se il filtro di ricostruzione ha funzione di trasferimento:

$$H(f) = \begin{cases} K & |f| \leq 7\,\text{kHz} \\ K - K\frac{|f|-7000}{4000} & 7\,\text{kHz} \leq |f| \leq 11\,\text{kHz} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

per avere perfetta ricostruzione ed evitare che le repliche si sovrappongano è necessario garantire che la frequenza di campionamento sia tale per cui il filtraggio non coinvolga tale repliche; deve quindi essere:

$$f_c - B \geq 11\text{kHz} \quad \Rightarrow \quad f_{c,min} = 17\,\text{kHz}$$

Poiché la trasformata di Fourier $X_s(f)$ del segnale campionato $x_s(t)$ vale:

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s}\sum_n X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

per avere perfetta ricostruzione si deve scegliere $K = T_s = \frac{1}{f_c}$, in modo da poter estrarre esattamente $X(f)$ e, quindi ottenere $x(t)$.

Soluzione esercizio 1.11

Per poter calcolare la trasformata di Fourier $X_p(f)$ del segnale $x_p(t)$ riscriviamo quest'ultimo nella forma:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \sum_k x(kT_s)p(t-kT_s) = \\ &= p(t) * \sum_k x(kT_s)\delta(t-kT_s) = \\ &= p(t) * \left\{ x(t) \sum_k \delta(t-kT_s) \right\} \end{aligned}$$

In questo modo risulta immediato calcolare $X_p(f)$:

$$X_p(f) = P(f)\left\{ X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \right\} = P(f)\frac{1}{T_s}\sum_n X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

Per evitare la sovrapposizione delle repliche traslate di $X(f)$, cioè il cosiddetto fenomeno di *aliasing* in frequenza che impedisce l'esatta ricostruzione del segnale, occorre rispettare il teorema del campionamento che impone la condizione:

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2W$$

Per poter ricostruire il segnale è necessario estrarre la trasformata di Fourier $X(f)$ dalla trasfomata di Fourier $X_p(f)$ del segnale campionato; è indispensabile, quindi, che $P(f)$ sia diverso da zero per almeno un intervallo $[-W \pm (k/T_s), W \pm (k/T_s)]$. Il filtro ricostruttore avrà espressione:

$$H(f) = \begin{cases} \frac{T_s}{P(f)} & \frac{k}{T_s} - W \leq |f| \leq \frac{k}{T_s} + W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per ottenere il segnale $x(t)$ bisogna ancora moltiplicare per $2\cos 2\pi \frac{k}{T_s} t$, in modo da riportare in banda base la k-esima replica del segnale campionato, e filtrare con un passabasso ideale avente banda W.

Soluzione esercizio 1.12

Dal teorema del campionamento è noto che, dato un segnale $x(t)$ con banda W, campionato ad una frequenza $f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2W$, è possibile ricostruire il segnale a partire dai suoi campioni:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2W'T_s\, x(kT_s)\ \mathrm{sinc}(2W'(t-kT_s)) \qquad \forall W' :\ W \leq W' \leq \frac{1}{T_s} - W$$

Nel caso particolare in cui $W = \frac{1}{2T_s}$ si ha:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\mathrm{sinc}\left[\frac{1}{T_s}(t-kT_s)\right]$$

Nell'esercizio, essendo $W = 100\mathrm{Hz}$ e $f_s = 200\mathrm{Hz}$ si può ricavare l'espressione di $x(0.002)$ semplicemente sostituendo il valore dei campioni nella relazione precedente[1]:

$$\begin{aligned} x(0.002) &= \sum_{k=-5}^{-1} \mathrm{sinc}\,(f_s \cdot 0.002 - k) - \sum_{k=1}^{5} \mathrm{sinc}\,(f_s \cdot 0.002 - k) = \\ &= \sum_{k=-5}^{-1} \mathrm{sinc}\,(0.4 - k) - \sum_{k=1}^{5} \mathrm{sinc}\,(0.4 - k) = \\ &= -0.57989 \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 1.13

1) La funzione di distribuzione cumulativa $F_X(x)$ della variabile casuale X, distribuita secondo $f_X(x)$ è per definizione la probabilità che la variabile casuale X assuma un valore non superiore a x, cioè:

$$F_X(x) \ = \ \mathrm{P}\,(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\nu)\, d\nu$$

In questo esercizio, essendo X distribuita secondo $f_X(x) = \Lambda(x)$ è sufficiente considerare il calcolo del seguente integrale:

$$F_X(x) \ = \int_{-\infty}^{x} f_X(\nu)\, d\nu = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \int_{-1}^{x} (\nu+1)\ d\nu = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \int_{-1}^{x} (-\nu+1)\ d\nu = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

2) Per calcolare $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ si consideri la relazione:

[1] Si ricordi che $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{2}\right)$$

Utilizzando i risultati trovati al punto 1) si ha:

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

3) Per il calcolo della probabilià condizionata si consideri la relazione di Bayes che lega quest'ultima alla probabilità congiunta:

$$P\left(X > 0 | X < \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X > 0\,, X < \frac{1}{2}\right)}{P\left(X < \frac{1}{2}\right)}$$

Per come è definita la funzione cumulativa, è immediato verificare che la probabilità che la variabile casuale X sia contemporaneamente maggiore di zero e minore di 0,5 vale:

$$P\left(X > 0, X < \frac{1}{2}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X(0)$$

Si ha, quindi:

$$P\left(X > 0 | X < \frac{1}{2}\right) = \frac{F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X(0)}{F_X\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{7}{8} - \frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}$$

4) Per ottenere $f_X(x|X > 1/2)$ si sfruttano i risultati trovati al punto 3); si consideri, infatti:

$$\begin{aligned} F_X\left(x|X > \frac{1}{2}\right) &= P\left(X < x | X > \frac{1}{2}\right) = \\ &= \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{2} \\ \dfrac{F_X(x) - F_X(0)}{1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right)} = 8 \cdot \left[F_X(x) - F_X(0)\right] & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

derivando rispetto a x si ottiene:

$$f_X(x|X > \frac{1}{2}) = \frac{d}{dx} F_X\left(x|X > \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{2} \text{ e } x > 1 \\ 8 f_X(x) = 8(-x+1) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Si noti che per ottenere questo risultato si è utilizzata la relazione tra funzione di distribuzione $f_X(x)$ e funzione cumulativa $F_X(x)$; inoltre è evidente che la probabilià che la variabile casuale X assuma valori contemporaneamente minori e maggiori di 0,5 sia nulla.

5) Dalla definizione di momento del prim'ordine, si può scrivere:

$$\begin{aligned} E\left[X|X>\frac{1}{2}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|X>\frac{1}{2})\,dx = \int_{1/2}^{1} x(8-8x)\,dx = 8\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \\ &= 8\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right] = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 1.14

1) Per determinare il valore di K è necessario imporre che la densità di probabilità congiunta $f_{X,Y}(x,y)$ abbia integrale unitario sul dominio $\mathcal{D} = \{(x,y) : 0 \leq x,y \leq 1\}$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} K\iint_{\mathcal{D}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy &= K\int_0^1\int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = K\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dy\,dx = \\ &= K\int_0^1 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} dx = K\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = \\ &= K\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_0^1 = K \end{aligned}$$

Imponendo la condizione di integrale unitario si ottiene un valore di K pari a 1.

2) Per trovare $P(X+Y>1)$ è sufficiente riscrivere il dominio di integrazione come :

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : x+y>1\} = \{(x,y) : y > 1-x\}$$

e calcolare l'integrale :

$$\begin{aligned} P(X+Y>1) &= \iint_{\mathcal{D}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{1-x}^{1}(x+y)\,dy\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \left\{x+\frac{1}{2}-\left[x(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2\right]\right\} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{6}(1-x)^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3) Procedendo come al punto 2) e scrivendo:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : x > y\}$$

si ottiene:

$$
\begin{aligned}
P(X > Y) &= \iint_{\mathcal{D}} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x (x+y)\, dy\, dx = \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left. \frac{x^3}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

4) Per la probabilità condizionata si utilizza la formula di Bayes, cioè:

$$
P(X > Y | X + 2Y > 1) = \frac{P(X > Y\,, X + 2Y > 1)}{P(X + 2Y > 1)}
$$

A questo punto è sufficiente calcolare $P(X + 2Y > 1)$ e $P(X > Y\,, X + 2Y > 1)$ procedendo come nei punti precedenti; si definisce, quindi, il nuovo dominio di integrazione

$$
\mathcal{D} = \{(x,y) : x + 2y > 1\} = \left\{ (x,y) : y > \frac{1}{2}(1-x) \right\}
$$

ottenendo:

$$
\begin{aligned}
P(X + 2Y > 1) &= \iint_{\mathcal{D}} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}(1-x)}^1 (x+y)\, dy\, dx = \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=\frac{1}{2}(1-x)}^{y=1} dx = \int_0^1 \left\{ x + \frac{1}{2} - \left[\frac{x}{2}(1-x) + \frac{1}{8}(1-x)^2 \right] \right\} dx \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} \right) dx = \\
&= \left[\frac{3x^2}{8} + \frac{3x}{8} + \frac{x^3}{8} \right]_0^1 = \frac{7}{8}
\end{aligned}
$$

Per il calcolo della probabilità congiunta $P(X > Y\,, X + 2Y > 1)$ il dominio d'integrazione diviene:

$$
\mathcal{D} = \{(x,y) : x + 2y > 1\} \cap \{(x,y) : \, x > y\} = \left\{ (x,y) : \frac{1}{3} \leq x \leq 1\,, \frac{1}{2}(1-x) \leq y \leq x \right\}
$$

Si ha, quindi:

$$
\begin{aligned}
P(X > Y\,, X + 2Y > 1) &= \iint_{\mathcal{D}} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{\frac{1}{3}}^1 \int_{\frac{1}{2}(1-x)}^x (x+y)\, dy\, dx = \\
&= \int_{\frac{1}{3}}^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=\frac{1}{2}(1-x)}^{y=x} dx =
\end{aligned}
$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{1} \left\{ \frac{3x^2}{2} - \left[\frac{x}{2}(1-x) + \frac{1}{8}(1-x)^2 \right] \right\} dx =$$

$$= \left[\frac{15x^3}{24} - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{8} \right]_{\frac{1}{3}}^{1} = \frac{3}{8} - \frac{5}{216} + \frac{1}{72} + \frac{1}{24} = \frac{11}{27}$$

In definitiva, risulta:

$$\begin{aligned} P(X > Y | X + 2Y > 1) &= \frac{P(X > Y\,, X + 2Y > 1)}{P(X + 2Y > 1)} = \\ &= \frac{\frac{11}{27}}{\frac{7}{8}} = \frac{88}{189} \end{aligned}$$

5) È immediato verificare che la probabilità $P(X = Y) = 0$, in quanto l'integrale doppio esteso al dominio di misura nulla:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : x = y\}$$

risulta nullo.

6) In questo caso non è possibile applicare direttamente la formula di Bayes:

$$P(X > \frac{1}{2} | X = Y) = \frac{P(X > \frac{1}{2}\,, X = Y)}{P(X = Y)}$$

in quanto $P(X = Y) = 0$. Si utilizzi quindi il seguente passaggio al limite: l'evento $X = Y$ è il limite per $\varepsilon \to 0$ della serie di eventi $|X - Y| < \varepsilon$. La probabilità cercata risulta essere:

$$P(X > \frac{1}{2} | X = Y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(X > \frac{1}{2}\,, |X - Y| < \varepsilon)}{P(|X - Y| < \varepsilon)}$$

Il dominio d'integrazione sarà:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{(x,y) : |x - y| < \varepsilon\} \\ &= \{(x,y) : x - \varepsilon \le y \le x + \varepsilon\} \cap \{(x,y) : y - \varepsilon \le x \le y + \varepsilon\} \end{aligned}$$

Per poter effettuare il calcolo dei vari integrali in modo agevole è utile scomporre ciascun integrale nella somma di vari contributi facilmente calcolabili. Si consideri quindi:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (x + y)\, dy\, dx = \\ &= \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x-\varepsilon}^{y=x+\varepsilon} dx = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} 4\varepsilon x\, dx = \left[2\varepsilon x^2 \right]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 2\varepsilon - 4\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\varepsilon}\int_0^{x+\varepsilon} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\varepsilon}\int_0^{x+\varepsilon} (x+y)\,dy\,dx = \\
&= \int_0^{\varepsilon}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x+\varepsilon} dx = \int_0^{\varepsilon}\left[\frac{3x^2}{2}+2\varepsilon\,x+\frac{\varepsilon^2}{2}\right] dx = \left[\frac{x^3}{2}+\varepsilon\,x^2+\frac{\varepsilon^2\,x}{2}\right]_0^{\varepsilon} = 2\varepsilon^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{1-\varepsilon}^{1}\int_{x-\varepsilon}^{1} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_{1-\varepsilon}^{1}\int_{x-\varepsilon}^{1} (x+y)\,dy\,dx = \int_{1-\varepsilon}^{1}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x-\varepsilon}^{y=1} dx = \\
&= \int_{1-\varepsilon}^{1}\left[-\frac{3x^2}{2}+(2\varepsilon+1)x-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{1}{2}\right] dx = \left[-\frac{x^3}{2}+(\varepsilon+\frac{1}{2})x^2+\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{1}{2}\right)x\right]_{1-\varepsilon}^{1} = \\
&= 3\varepsilon^2-2\varepsilon^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (x+y)\,dy\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x-\varepsilon}^{y=x+\varepsilon} dx = \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} 4\varepsilon x\,dx = \left[2\varepsilon x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} = \frac{3\varepsilon}{2}-4\varepsilon^2+2\varepsilon^3
\end{aligned}$$

Risulta evidente che è possibile scrivere:

$$P(X>\frac{1}{2}|X=Y) \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I_4+I_3}{I_1+I_2+I_3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{3\varepsilon}{2}-\varepsilon^2}{2\varepsilon-\varepsilon^2} = \frac{3}{4}$$

Si noti che il calcolo di $P(|X-Y|<\varepsilon)$ poteva essere svolto agevolmente anche considerando:

$$P(|X-Y|<\varepsilon) = 1-\int_0^1\int_{x-\varepsilon}^{1} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx - \int_0^1\int_0^{x-\varepsilon} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

tuttavia risultava più elaborato quello di $P(X>\frac{1}{2}\,,|X-Y|<\varepsilon)$

7) Per il calcolo delle densita di probabilità marginali si utilizzino le relazioni:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int f_{X,Y}(x,y)\,dy \\
f_Y(x) &= \int f_{X,Y}(x,y)\,dx
\end{aligned}$$

Risulta, dunque:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right] = x + \frac{1}{2} \\
f_Y(x) &= \int f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{x^2}{2}\right] = y + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

8) Si ha:

$$
f_X(x|X+2Y>1) = \frac{d}{dx}\frac{P(X<x\,,X+2Y>1)}{P(X+2Y>1)}
$$

Il calcolo di $P(X+2Y>1)$ è già stato effettuato al punto 4), mentre per quello di $P(X<x\,,X+2Y>1)$ è sufficiente considerare l'integrale:

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \int_{\frac{1}{2}(1-v)}^1 (v+y)\,dy\,dv &= \int_0^x \left[vy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=\frac{1}{2}(1-v)}^1 dv = \\
&= \int_0^x \left[\frac{3v^2}{8} + \frac{3v}{4} + \frac{3}{8}\right] = \frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{8} + \frac{3x}{8}
\end{aligned}
$$

In definitiva, risulta:

$$
\begin{aligned}
f_X(x|X+2Y>1) &= \frac{d}{dx}\frac{P(X<x\,,X+2Y>1)}{P(X+2Y>1)} = \\
&= \frac{d}{dx}\frac{8}{7}\left[\frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{8} + \frac{3x}{8}\right] = \frac{3x^2}{7} + \frac{6x}{7} + \frac{3}{7}
\end{aligned}
$$

9) In base alla definizione di media, si ha:

$$
\begin{aligned}
E[X|X+2Y>1)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x|X+2Y>1)\,dx = \\
&= \int_0^1 \left[\frac{3x^3}{7} + \frac{6x^2}{7} + \frac{3x}{7}\right] dx = \\
&= \left[\frac{3x^4}{28} + \frac{2x^3}{7} + \frac{3x^2}{14}\right]_0^1 = \frac{17}{28}
\end{aligned}
$$

Soluzione esercizio 1.15

La densità spettrale di potenza del rumore Gaussiano bianco $n(t)$ filtrato dal filtro con funzione di trasferimento $H(f)$ è:

$$S_\nu(f) = S_n(f) \cdot |H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & f_c - W \leq |f_c| \leq f_c + W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove:

- $S_\nu(f)$ è la densità spettrale di potenza del processo $\nu(t)$ ottenuto dal filtraggio di $n(t)$
- $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$ è la densita spettrale di potenza del rumore Gaussiano bianco $n(t)$
- $H(f)$ è la funzione di trasferimento del filtro passabanda ideale con guadagno unitario e banda $2W$ centrata intorno alla frequenza $f_c \gg W$, cioè:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f_c - W \leq |f_c| \leq f_c + W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- è possibile esprimere il processo d'uscita $\nu(t)$ mediante la parte in fase e in quadratura rappresentandolo nella forma:

$$\nu(t) = \text{Re}\left\{\tilde{\nu}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

  dove $\tilde{\nu}(t) = \nu_c(t) + j\nu_s(t)$ rappresenta l'inviluppo complesso del processo $\nu(t)$; svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \text{Re}\left\{\tilde{\nu}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \\ &= \nu_c(t)\, \cos 2\pi f_0 t - \nu_s(t)\, \sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

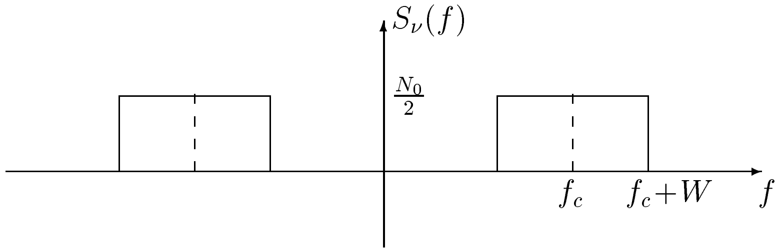


Figura 1.11 Densità spettrale di potenza $S_\nu(t)$

Per agevolare la comprensione dell'esercizio si propongono inizialmente le soluzioni valide nel caso generale, considerando in seguito i due casi proposti.

1. La densità spettrale di potenza della parte in fase e in quadratura di $\nu(t)$ è esprimibile come:

$$S_{\nu_c}(f) \;=\; S_{\nu_s}(f) = S_\nu(f-f_0) + S_\nu(f+f_0) \quad \text{per } |f| \le f_0$$

Per quanto riguarda invece la loro densità spettrale di potenza mutua, si può scrivere:

$$S_{\nu_c\,\nu_s}(f) = j\,[S_\nu(f+f_0) - S_\nu(f-f_0)] \quad \text{per } |f| \le f_0$$

2. La densità spettrale di potenza dell'inviluppo complesso $\tilde{\nu}(f)$ è legata alla densità spettrale di potenza del processo $\nu(t)$ dalla relazione:

$$S_{\tilde{\nu}}(f) = 4u(f+f_0)S_\nu(f+f_0)$$

Si considerino ora i casi in cui $f_0 = f_c$ e $f_0 = f_c - W$:

- Caso $f_0 = f_c$

  Per ottenere i risultati in maniera agevole si ragioni sempre dal punto di vista grafico, a partire dalla figura relativa allo spettro di potenza $S_\nu(t)$ del processo $\nu(t)$:

  1. Essendo $f_0 = f_c$ la densità spettrale di potenza della parte in fase e in quadratura risulterà:

  $$S_{\nu_c}(f) \;=\; S_{\nu_s}(f) = S_\nu(f-f_0) + S_\nu(f+f_0) =$$

  $$= \begin{cases} \frac{N_0}{2} + \frac{N_0}{2} = N_0 & |f| \le W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

  La densità spettrale di potenza mutua vale:

  $$S_{\nu_c\,\nu_s}(f) = j\,[S_\nu(f+f_0) - S_\nu(f-f_0)] = 0$$

  2. La densità spettrale di potenza dell'inviluppo complesso $\tilde{\nu}(f)$ è pari a:

  $$S_{\tilde{\nu}}(f) \;=\; 4u(f+f_0)S_\nu(f+f_0) =$$

  $$= \begin{cases} 4\frac{N_0}{2} = 2N_0 & |f| \le W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

  Si noti che in questo caso risulta:

  $$S_\nu(f-f_0) = S_\nu(f+f_0)$$

  quindi è possibile affermare che la parte in fase $\nu_c(t)$ e la parte in quadratura $\nu_s(t')$ sono incorrelati per qualsiasi (t,t')

- Caso $f_0 = f_c - W$

  Procedendo come nel caso precedente si ottiene:

1.

$$
\begin{aligned}
S_{\nu_c}(f) &= S_{\nu_s}(f) = S_\nu(f-f_0) + S_\nu(f+f_0) = \\
&= \begin{cases} \frac{N_0}{2} & |f| \le 2W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\nu_c\,\nu_s}(f) &= j\,[S_\nu(f+f_0) - S_\nu(f-f_0)] = \\
&= \begin{cases} j\,\frac{N_0}{2} & 0 < f \le 2W \\ -j\,\frac{N_0}{2} & -2W \le f < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
S_{\tilde{\nu}}(f) &= 4u(f+f_0)S_\nu(f+f_0) = \\
&= \begin{cases} 4\frac{N_0}{2} = 2N_0 & 0 \le f \le 2W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
\end{aligned}
$$

In questo caso la parte in fase $\nu_c(t)$ e la parte in quadratura $\nu_s(t')$ sono incorrelati solamente per $t = t'$, poiché

$$S_\nu(f-f_0) \neq S_\nu(f+f_0)$$

Soluzione esercizio 1.16

La densità spettrale di potenza del processo $\nu(t)$, ottenuto dal filtraggio del processo Gaussiano bianco, con densità spettrale di potenza $S_n(f) = 0.001\Lambda(f/1000)$, attraverso un filtro passabanda ideale con banda $W = 10$Hz, centrato intorno alla frequenza 500 Hz, è data da:

$$S_\nu(f) = S_n(f)\cdot|H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{1000}\Lambda(\frac{f}{1000}) & 495 \text{ Hz} \le |f| \le 505 \text{ Hz} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

essendo :

$$H(f) = \begin{cases} 1 & (500 - \frac{10}{2})\text{Hz} \le |f| \le (500 + \frac{10}{2})\text{Hz} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La potenza di uscita del processo $\nu(t)$ è espressa dalla relazione :

$$P_{\nu,out} = \int_{-\infty}^{\infty} S_\nu(f)\,df$$

Sostituendo l'espressione di S_ν e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} P_{\nu,out} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_\nu(f)\, df = \\ &= \int_{-505}^{-495} S_\nu(f)\, df + \int_{495}^{505} S_\nu(f)\, df = 2\int_{495}^{505} \frac{1}{1000}\Lambda(\frac{f}{1000})\, df = \\ &= \frac{1}{500}\int_{495}^{505}\left(1-\frac{f}{1000}\right) df = \frac{1}{500}\left\{505-495-\left[\frac{f^2}{2000}\right]_{495}^{505}\right\} = \frac{1}{100}\mathrm{W} \end{aligned}$$

Si esprima ora il processo d'uscita $\nu(t)$ mediante la parte in fase e in quadratura:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \mathrm{Re}\left\{\tilde{\nu}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \\ &= \nu_c(t)\, \cos 2\pi f_0 t - \nu_s(t)\, \sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

Per trovare la potenza della parte in fase e in quadratura è sufficiente considerare l'espressione della densità spettrale di potenza di $\nu_c(t)$ e $\nu_s(t)$, tenendo presente che si assume $f_0 = 500\,\mathrm{Hz}$:

$$\begin{aligned} S_{\nu_c}(t) &= S_{\nu_s}(t) = S_\nu(f-f_0)u(f_0-f) + S_\nu(f+f_0)u(f+f_0) = \\ &= \begin{cases} 1 & |f| \le 5 \text{ Hz} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$

La potenza della parte in fase e in quadratura risulta, quindi:

$$P_{\nu_c} = P_{\nu_s} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\nu_c}(f)\, df = \frac{2}{1000}\int_0^5 df = \frac{1}{100}\mathrm{W}$$

Soluzione esercizio 1.17

Dato un processo $x(t)$ stazionario in senso lato si definisce come *spettro di potenza* o *densità spettrale di potenza* la trasformata di Fourier $S_x(f)$ della sua autocorrelazione $R_x(\tau)$, cioè:

$$S_x(f) = \mathcal{F}\left\{R_x(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, \mathrm{e}^{-j2\pi f t}\, dt$$

In questo esercizio, essendo:

$$R_x(\tau) = \mathrm{e}^{-|\tau|/T_0} \quad T_0 > 0\,,$$

si ha:

$$S_x(f) = \mathcal{F}\left\{\mathrm{e}^{-|\tau|/T_0}\right\} = \frac{2T_0}{1+(2\pi f T_0)^2}$$

Si consideri a questo punto il processo che si ottiene filtrando $x(t)$ con un sistema lineare, invariante con risposta all'impulso $h(t) = \mathrm{e}^{-t/t_0}\, u(t)$, con $t_0 > 0$. L'autocorrelazione $R_y(\tau)$ del processo in uscita è data da:

$$R_y(\tau) = R_h\,(\tau) * R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_h\,(\tau)\, R_x(\tau - u)\, du$$

dove:

$$R_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\theta)\, h(\tau+\theta)\, d\theta$$

Per trovare la *densità spettrale di potenza* del processo di uscita $y(t)$ è, quindi, sufficiente considerare la trasformata di Fourier della sua autocorrelazione:

$$S_y(f) \;=\; \mathcal{F}\{R_y(\tau)\} = S_h(f)\, S_x(f) = |\, H(f)\,|^2\; S_x(f)$$

dove:

$$S_h(f) \;=\; |H(f)|^2 = \left|\frac{t_0}{1+j2\pi f t_0}\right|^2 = \frac{{t_0}^2}{1+(2\pi f t_0)^2}$$

è lo spettro di energia di $h(t)$, che è uguale alla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $R_h(\tau)$.
In definitiva, la densità spettrale di potenza del processo di uscita $y(t)$ risulta essere:

$$\begin{aligned} S_y(f) \;&=\; |H(f)|^2 S_x(f) = \\ &=\; \frac{{t_0}^2}{1+(2\pi f t_0)^2} \cdot \frac{2T_0}{1+(2\pi f T_0)^2} \end{aligned}$$

Capitolo 2

Rumore termico (soluzioni)

Richiami sul rumore termico

Sono riportate di seguito alcune nozioni fondamentali relative al rumore termico. In quanto segue si fa sempre l'ipotesi di adattamento di carico all'ingresso dei doppi bipoli considerati.

- **Densità spettrali del rumore generato da una resistenza**

  Il rumore termico generato da una resistenza R alla temperatura T è un processo casuale di cui sono note le densità spettrali del valor quadratico medio della tensione, della potenza disponibile e del valor quadratico medio della corrente. Esse sono date dalle relazioni:

$$\begin{cases} G_e(f) = 2kTR & \text{densità spettrale del valor quadratico medio della tensione} \\ G_i(f) = \dfrac{2kT}{R} & \text{densità spettrale del valor quadratico medio della corrente} \\ G_n(f) = \dfrac{2kTR}{4R} = \dfrac{kT}{2} & \text{densità spettrale della potenza disponibile} \end{cases}$$

  legate tra loro secondo le leggi dell'elettrotecnica. La densità spettrale del valor quadratico medio della tensione è un'approssimazione della formula

$$G_e(f) = 2R\left[\frac{h}{2}|f| + \frac{h|f|}{e^{h|f|/kT} - 1}\right]$$

  valida per $|f| < 2.1 \cdot 10^9\,T$ (per $T = 300°\mathrm{K} \rightarrow |f| < 600\mathrm{GHz}$) e $h|f|/kT < 0.1$, dove $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}$ e $k = 1.38 \cdot 10^{-23}\mathrm{J/K}$.

□ Cifra di rumore di un doppio bipolo

La cifra di rumore di un doppio bipolo è definita come il rapporto tra le potenze disponibili in uscita N_{du} e N'_{du} (la seconda potenza è quella che si avrebbe qualora il doppio bipolo non aggiungesse rumore al segnale) misurate alla temperatura di riferimento del generatore $T_0 = 290$ K.

$$F \;=\; \left.\frac{N_{du}}{N'_{du}}\right|_{T_0}$$

□ Temperatura equivalente di rumore di un doppio bipolo

Assumiamo che il doppio bipolo abbia banda equivalente di rumore B e guadagno disponibile g_d. La potenza di rumore disponibile in uscita può vedersi come composta dalla potenza di rumore disponibile in ingresso amplificata (N'_{du}) più una componente introdotta dal doppio bipolo (N_d):

$$N_{du} \;=\; N'_{du} + N_d \;=\; \frac{kT}{2}\cdot 2B\cdot g_d + N_d \;=\; \frac{k(T+T_e)}{2}\cdot 2B\cdot g_d \;.$$

T_e è la temperatura equivalente di rumore del doppio bipolo definita come

$$T_e \;=\; \frac{N_d}{kBg_d} \;.$$

La T_e rappresenta l'innalzamanto di temperatura di T_s che fornisce lo stesso rumore in uscita di un doppio bipolo con caratteristiche invariate ma non rumoroso.

□ Relazione tra cifra e temperatura equivalente di rumore

Dalla definizione di cifra di rumore si ricava facilmente:

$$F \;=\; \left.\frac{N_{du}}{N'_{du}}\right|_{T_0} \;=\; 1+\left.\frac{N_d}{N'_{du}}\right|_{T_0} \;=\; 1+\frac{T_e}{T_0} \qquad\qquad T_e \;=\; (F-1)T_0 \;.$$

□ Cifra di rumore di un attenuatore di potenza

Supponiamo che una resistenza sia collegata ad un attenuatore di potenza con attenuazione pari a L, posto alla temperatura T_L e con banda equivalente di rumore B. Supponiamo che anche il generatore di rumore sia posto alla temperatura T_L. Quindi possiamo considerare il generatore di rumore e l'attenuatore come se si trattasse di un unico generatore di rumore la cui potenza disponibile in uscita è data dall'espressione:

$$N_{du} \;=\; kT_LB \;=\; \frac{kT_LB}{L} + kT_LB\left(1-\frac{1}{L}\right) \;.$$

Il primo termine della somma è il contributo del generatore e il secondo rappresenta il rumore aggiunto dall'attenuatore. Portando il generatore alla temperatura T_0, la sua potenza di rumore disponibile diventa

$$N'_{du} \;=\; \frac{kT_0B}{L} \;.$$

Complessivamente, la potenza di rumore disponibile in uscita vale

$$N_{du} = \frac{kT_0B}{L} + kT_LB\left(1 - \frac{1}{L}\right) ,$$

e dalla definizione di cifra di rumore si ha:

$$F = \left.\frac{N_{du}}{N'_{du}}\right|_{T_0} = 1 + (L-1)\frac{T_L}{T_0} .$$

Da questa relazione si ottiene la temperatura equivalente di rumore:

$$T_e = (F-1)T_0 = (L-1)T_L .$$

□ Temperatura di rumore di una cascata di doppi bipoli

La temperatura equivalente di rumore T_e di una cascata di doppi bipoli adattati ciascuno con temperatura di rumore T_i e guadagno disponibile g_i per $i = 1, \cdots, n$ è data dalla relazione

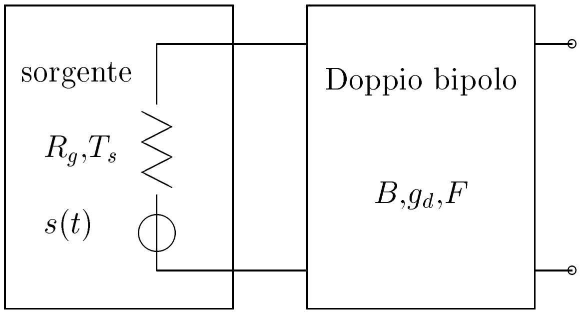
$$T_e = T_1 + \frac{T_2}{g_1} + \frac{T_3}{g_1g_2} + \cdots + \frac{T_n}{g_1g_2\cdots g_{n-1}} .$$

□ Cifra di rumore di una cascata di doppi bipoli

La cifra di rumore F di una cascata di doppi bipoli adattati ciascuno con cifra di rumore F_i e guadagno disponibile g_i per $i = 1, \cdots, n$ è data dalla relazione

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_1} + \frac{F_3 - 1}{g_1g_2} + \cdots + \frac{F_n - 1}{g_1g_2\cdots g_{n-1}} .$$

Soluzione esercizio 2.1



La densità spettrale di rumore disponibile dalla resistenza del generatore R_g è

$$G_n(f) \;=\; \frac{2kT_sR_g}{4R_g} \;=\; \frac{kT_s}{2} \; .$$

Di conseguenza, poiché il doppio bipolo ha banda equivalente di rumore B, la potenza di rumore disponibile all'ingresso che attraversa il doppio bipolo è

$$N_{di} \;=\; \frac{kT_s}{2} \cdot 2B \;=\; kT_sB \; .$$

Poiché il doppio bipolo ha guadagno disponibile g_d e temperatura equivalente di rumore T_e, la potenza di rumore disponibile in uscita vale

$$N_{du} \;=\; k(T_s + T_e)B \cdot g_d \; .$$

La potenza di segnale disponibile in uscita è data da quella disponibile in ingresso moltiplicata per il guadagno, ovvero

$$S_{du} \;=\; S_{di} \cdot g_d \; ,$$

da cui si ottiene il rapporto segnale/rumore in uscita:

$$(S/N)_u \;=\; \frac{S_{di} \cdot g_d}{k(T_s + T_e)B \cdot g_d} \;=\; \frac{T_s}{T_s + T_e} \cdot (S/N)_i \;=\; \frac{T_s}{T_s + (F-1)T_0} \cdot (S/N)_i$$

Se si assume che la temperatura di sorgente T_s sia circa uguale a T_0, si ottiene il risultato

$$(S/N)_u \;=\; \frac{1}{F} \cdot (S/N)_i \; .$$

Questo risultato giustifica il nome dato alla cifra di rumore in quanto si tratta del coefficiente di attenuazione del rapporto segnale/rumore dall'ingresso all'uscita dovuto alla presenza del doppio bipolo, con il sistema alla temperatura T_0.

Soluzione esercizio 2.2

Utilizzando i dati del problema si ottiene lo spettro del valore quadratico medio della componente di rumore $n(t)$ di $v(t)$:

$$G_n(f) \;=\; 2k\left[T_s + \frac{T_0}{1+(f/B_T)^2}\right] R_g g_d(f)$$

Di conseguenza, si può calcolare il valore efficace di $n(t)$ attraverso la relazione

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} 2k\left[T_s + \frac{T_0}{1+(f/B_T)^2}\right]\frac{g_0}{2\pi[1+(f/B)^2]}R_g\; df \\ &=\; g_0 R_g k B\left[T_s + \frac{B_T}{B+B_T}T_0\right]\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2.3

Assumendo che B sia la banda equivalente di rumore del doppio bipolo e g_d il suo guadagno disponibile, le potenze misurate sono le seguenti:

$$P \;=\; k(T_0+T_e)Bg_d \qquad \text{e} \qquad 2P \;=\; k(T_R+T_e)Bg_d\ ,$$

da cui si ricava facilmente

$$T_e \;=\; T_R - 2T_0 \qquad \Longrightarrow \qquad F \;=\; \frac{T_R}{T_0} - 1\ .$$

Soluzione esercizio 2.4

La linea di trasmissione può essere vista come una cascata di n blocchi costituiti da un tratto di linea più un amplificatore con guadagno complessivo unitario.

Essendo L l'attenuazione complessiva della linea, l'attenuazione di ogni tratto e il guadagno di ogni amplificatore valgono $L^{1/n}$.

Di conseguenza, la temperatura equivalente di rumore di un singolo stadio linea-amplificatore è data dall'espressione

$$T_{LA} \;=\; (L^{1/n}-1)T_L + \frac{T_a}{L^{-1/n}} \;=\; (T_L+T_a)L^{1/n} - T_L\ ,$$

dove T_L è la temperatura ambiente a cui si trova la linea (che si considera un attenuatore di potenza) e T_a è la temperatura equivalente di rumore degli amplificatori.

Da questo risultato si ricava la temperatura equivalente di rumore di tutta la linea con n amplificatori:

$$T_e \;=\; T_{LA} + \frac{T_{LA}}{1} + \cdots + \frac{T_{LA}}{1^{n-1}} \;=\; nT_{LA} \;=\; n\left[(T_L+T_a)L^{1/n} - T_L\right]$$

Per trovare il valore di n che ottimizza le prestazioni dal punto di vista del rumore occorre trovare il minimo dell'espressione precedente rispetto a n:

$$\frac{dT_e}{dn} \;=\; (T_L + T_a)\left(1 - \frac{\ln L}{n}\right) L^{1/n} - T_L \;=\; 0\ .$$

Se si suppone $T_a \gg T_L$, si ottiene

$$n \cong \ln L\ .$$

Inserendo i valori del problema, si ha

$$L \;=\; 10^{60\cdot 0.44/10} \qquad \Longrightarrow \qquad n \cong \ln L \cong 6\ .$$

Soluzione esercizio 2.5

La temperatura operativa del ricevitore è data dall'espressione

$$T_{op} \;=\; T_A + T_e \;=\; T_A + T_1 + \frac{T_2}{g_1} \;=\; 5 + 50 + \frac{300}{100} \;=\; 58\mathrm{K}\ ,$$

per cui la potenza di rumore disponibile all'uscita non amplificata dagli stadi dopo l'antenna vale

$$N \;=\; kT_{op}B \;=\; 1.38\cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}\cdot 58\ \mathrm{K}\cdot 50\cdot 10^{6}\ \mathrm{Hz} \;=\; 4\cdot 10^{-14}\mathrm{W}\ .$$

Al fine di garantire un rapporto segnale rumore di 10 dB occorre far sí che la potenza del segnale ricevuto dall'antenna sia

$$S \;=\; 10\cdot N \;=\; 4\cdot 10^{-13} W\ .$$

D'altronde, la potenza del segnale ricevuto dall'antenna è data dall'equazione

$$S \;=\; \frac{P_T\ g_T g_R}{(4\pi d/\lambda)^2}\ ,$$

dove λ è la lunghezza d'onda del segnale che vale circa

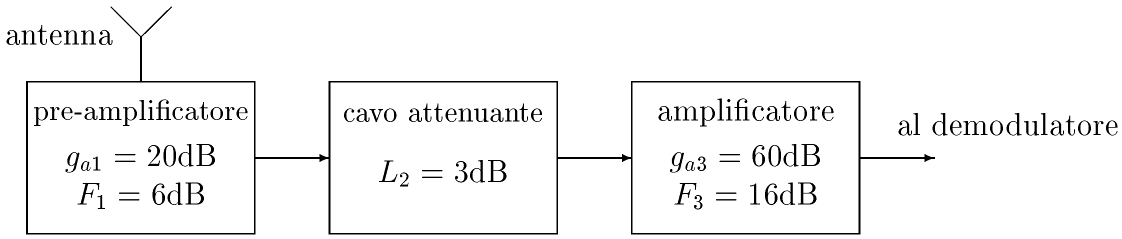
$$\lambda \;=\; \frac{c}{f_0} \;=\; \frac{3\cdot 10^8 \mathrm{m/s}}{4\cdot 10^9 \mathrm{Hz}} \;=\; 0.075\mathrm{m}\ .$$

Quindi si ottiene il guadagno minimo dell'antenna di ricezione:

$$g_R \;=\; S\cdot\frac{(4\pi d/\lambda)^2}{P_T g_T} \;=\; 4\cdot 10^{-13}\ \mathrm{W}\frac{(4\cdot 3.14\cdot 3.6\cdot 10^7\ \mathrm{m}/0.075\ \mathrm{m})^2}{10\cdot 4\ \mathrm{W}} \;=\; 3.64\cdot 10^5$$

corrispondente a 55.6 dB.

Soluzione esercizio 2.6



Nel primo caso, utilizzando la nota relazione che dà la cifra di rumore di una cascata di blocchi, si ottiene:

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{g_1} + \frac{F_3 - 1}{g_1 g_2} = 4 + \frac{2-1}{100} + \frac{40-1}{100 \cdot 0.5} = 4.79 \; .$$

Analogamente, nel secondo caso in cui il preamplificatore è assente e l'amplificatore guadagna 20 dB in più, si ha:

$$F = F_2 + \frac{F_3 - 1}{g_2} = 2 + \frac{40-1}{0.5} = 80 \; .$$

Commento: l'impiego di un preamplificatore di antenna a basso rumore consente di attenuare considerevolmente la cifra di rumore complessiva del sistema al prezzo di utilizzare un componente in più. Si noti che l'ipotesi di mantenere inalterata la cifra di rumore all'aumento di 20 dB del guadagno dell'amplificatore è decisamente ottimistica.

Soluzione esercizio 2.7

a) Si consideri la cascata della linea e dell'amplificatore del ricevitore; indicando la cifra di rumore della linea con F_l, quella dell'amplificatore F_a e il guadagno della linea con G_L è possibile esprimere la cifra di rumore F_{tot} della cascata come:

$$F_{tot} = F_l + \frac{F_a - 1}{G_L} = L + \frac{F_a - 1}{\frac{1}{L}} = LF_a$$

Si noti che la cifra di rumore F_l di una linea di trasmissione alla temperatura T_0 vale:

$$F_l = \frac{(S/N)_i}{(S/N)_o} = \frac{P_t}{P_r} = L$$

poiché la potenza di rumore all'ingresso e all'uscita è la stessa se si assume che il sistema sia alla temperatura T_0 e l'origine del rumore sia esclusivamente termica (doppio bipolo passivo); l'attenuazione di potenza della linea è: $L = \alpha \cdot d = 200$ dB, dove α è la perdita in dB per unità di lunghezza e d è la lunghezza della linea. Si ha, dunque,:

$$F_{tot} = LF_a \Rightarrow F_{tot}\mid_{\text{dB}} = L\mid_{\text{dB}} + F_a\mid_{\text{dB}} = 200 + 4 = 204\text{dB}$$

Si consideri a questo punto l'espressione del rapporto segnale/rumore all'ingresso e all'uscita del sistema:

$$\begin{aligned}\mathrm{SNR}_{in} &= \frac{P_t}{N_0 B}\\ \mathrm{SNR}_{out} &= \frac{1}{F_{tot}}\mathrm{SNR}_{in} = \frac{P_t}{LF_a N_0 B}\end{aligned}$$

dove P_t rappresenta la potenza trasmessa. Imponendo un rapporto segnale/rumore in uscita $\mathrm{SNR}_{out} = 30\mathrm{dB}$ si ottiene una potenza trasmessa pari a:

$$P_t = LF_a N_0 B \cdot \mathrm{SNR}_{out} \cong 4 \cdot 10^7 \mathrm{W}$$

b) La cascata di n stadi linea+amplificatore dà una cifra di rumore pari a

$$F_{tot} \cong nL_{tratta}F_a = 10 \cdot 10^2 \cdot 10^{0.4} = 2511.89 \Rightarrow F_{tot} \cong 34\mathrm{dB}$$

dove

$$L_{tratta} = \alpha \cdot d_1 = 2\mathrm{dB/km} \cdot 10\mathrm{km} = 20\mathrm{dB}$$

rappresenta l'attenuazione di potenza di una tratta di linea lunga $d_1 = 10\mathrm{km}$
In questo caso la potenza trasmessa P_t, per garantire un rapporto segnale/rumore in uscita SNR_{out} di 30 dB, risulta pari a:

$$P_t = nL_{tratta}F_a N_0 B \cdot \mathrm{SNR}_{out} \cong 4 \cdot 10^{-10}\mathrm{W}$$

Soluzione esercizio 2.8

Indicando le potenze all'ingresso e all'uscita del ripetitore rispettivamente con P_{in} e P_{out}, la potenza di segnale con P_s e le potenze di rumore in ingresso e in uscita con N_{in} N_{out} si ha :

$$P_{in} = N_{in} + P_s = kT_0 B + P_s$$

cioè la potenza disponibile in ingresso del ripetitore è la somma di due contributi: il primo rappresenta la potenza di rumore in ingresso e P_s, la potenza di segnale. Indicando con L l'attenuazione di potenza del tratto di linea compresa fra due ripetitori successivi è possibile esprimere la potenza di segnale in ingresso al generico ripetitore in funzione della potenza in uscita del precedente amplificatore:

$$P_s = \frac{P_{out}}{L}$$

La potenza disponibile in uscita P_{out} può vedersi come composta dalla potenza di ingresso P_{in} amplificata del guadagno $G = 20$ dB dell'amplificatore e dalla potenza di rumore in uscita dell'amplificatore N_{out}:

$$P_{out} = GP_{in} + N_{out} = GP_{in} + GkT_0BF_a$$

Si noti che nella relazione precedente si è utilizzata l'espressione che lega la potenza di rumore in uscita da un amplificatore rumoroso con la cifra di rumore F_a. Procedendo a ritroso e sostituendo le nuove relazioni trovate, si può esprimere P_{in} come:

$$\begin{aligned} P_{in} &= N_{in} + P_s = kT_0B + P_s = kT_0B + \frac{P_{out}}{L} \\ &= kT_0B + \frac{1}{L}(GP_{in} + P_{n,out}) = kT_0B + \frac{1}{L}(GP_{in} + GkT_0BF_a) \end{aligned}$$

In questa relazione tutti i termini sono noti, quindi è possibile ricavare il valore dell'attenuazione di potenza del singolo tratto di linea L per garantire un livello del segnale di ingresso P_{in} di almeno 10 dBm [1]:

$$\begin{aligned} L &= \frac{G(P_{in} + kT_0BF_a)}{P_{in} - kT_0B} = \\ &= \frac{10^2(10^3 + 1.380662 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10^{0.6})}{10^3 - 1.380662 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \cdot 4 \cdot 10^3} = 100 \end{aligned}$$

Quindi $L = 100 \Rightarrow L = 20$ dB. Poché la linea ha una perdita α di 2 dB/km, la lughezza del singolo tratto di linea tra due ripetitori successivi è:

$$d = \frac{L}{\alpha} = \frac{20}{2} = 10\text{km}$$

Per garantire un livello del segnale di ingresso ad ogni ripetitore di 10 dBm si può inserire un ripetitore non rigenerativo ogni 10 km, quindi il numero di ripetitori sarà : $N = 20$

Soluzione esercizio 2.9

La potenza di rumore in uscita ad un amplificatore rumoroso con funzione di trasferimento $H(f)$ è:

$$N_{out} = kg_dB_e(T + T_e) = kg_dB_eT\left(1 + \frac{T_e}{T}\right) = kg_dB_eTF$$

dove:

- $k = 1.380662 \cdot 10^{-23} J/K$ è la costante di Boltzmann;
- g_d=max $\mid H(f) \mid^2$ è il guadagno dell'amplificatore;
- B_e è la *banda equivalente di rumore* definita come:

$$B_e = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{2 \max_f |H(f)|^2}$$

- T_e è la temperatura equivalente di rumore dell'amplificatore;

[1]dBm: $P \mid_{dBm} = 10 \log P$ con P espresso in mW

- F è la cifra di rumore dell'amplificatore, definita come $F = 1 + \frac{T_e}{T}$

Per risolvere il problema si utilizza la relazione della potenza di rumore, sostituendo la temperatura T con il valore $T = T_0 = 290°$K solitamente usato per le misure della cifra di rumore. Prima di poter ricavare F e T_e è però necessario calcolare la banda equivalente di rumore B_e e il guadagno g_d dell'amplificatore. Dai dati del problema è immediato ricavare che $g_d = \max |H(f)|^2 = H_0^2 = 1000 \Rightarrow g_d = 30$ dB, mentre per B_e si ha:

$$\begin{aligned} B_e &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{2 \max_f |H(f)|^2} = \frac{1}{2H_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \\ &= \frac{1}{2H_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^2}{\left[1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right]^2} df \end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabile $\frac{f}{f_0} = \omega$, si ottiene:

$$\begin{aligned} B_e &= \frac{f_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[1+\omega^2]^2} d\omega = \\ &= \frac{f_0}{2} \left[\frac{\omega}{2(1+\omega^2)} + \frac{1}{2} \arctan \omega \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{f_0 \pi}{4} \end{aligned}$$

Dalla relazione della N_{out} si ricava:

$$F = \frac{N_{out}}{k g_d B_e T_0} = \frac{10^8 k T_0}{k H_0^2 T_0 f_0 \frac{\pi}{4}} = 12.73 \Rightarrow F \cong 11 \text{ dB}$$

Infine dalla relazione che lega cifra di rumore e temperatura equivalente di rumore, si ricava quest'ultima:

$$T_e = T_0(F-1) = 290(12.73 - 1) \cong 3402°\text{K}$$

Soluzione esercizio 2.10

Tramite la nota relazione che lega cifra di rumore F e temperatura equivalente di rumore T_e, è possibile determinare quest'ultima all'ingresso del preamplificatore:

$$T_e = T_0(F-1) = 290(10^{0.2} - 1) = 169.6°\text{K}$$

Per calcolare la potenza di rumore all'uscita del preamplificatore è necessario tenere conto del rumore introdotto dall'antenna. Si utilizza quindi la relazione:

$$N_{out} = k(T_a + T_e)Bg = 3.63 \cdot 10^{-11}\text{W}$$

dove con T_a si è indicata, appunto, la temperatura di rumore dell'antenna, con B e g la banda ed il guadagno del preamplificatore.

Capitolo 3

Teoria dell'informazione (soluzioni)

Calcolo della capacità di un canale discreto

La capacità di un canale discreto privo di memoria a m ingressi e n uscite è data dal flusso di informazione $I(X;Y)$ ottenuto in corrispondenza di una distribuzione di probabilità dei simboli in ingresso al canale $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$ se e solo se sono verificate le condizioni (di Kuhn-Tucker):

$$\begin{cases} I(x_i;Y) \;=\; C & \forall i : \alpha_i \neq 0 \\ I(x_i;Y) \;\leq\; C & \forall i : \alpha_i = 0 \end{cases}$$

dove $I(x_i;Y) = \sum_j p(y_j|x_i) \log_2 \dfrac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$.

Si vede facilmente che C è la capacità del canale.

La difficoltà principale del problema del calcolo della capacità consiste nell'individuare la distribuzione di probabilità $\boldsymbol{\alpha}$ che massimizza $I(X;Y)$. La soluzione analitica può essere ottenuta per almeno due vie:

1. Si esprime $I(X;Y)$ in funzione di $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$ avendo posto $\alpha_m = 1-\alpha_1-\cdots-\alpha_{m-1}$, si deriva rispetto alle $m-1$ variabili e si annullano le derivate. Quindi si risolve il sistema di $m-1$ equazioni in $m-1$ incognite e si verifica che la soluzione sia una distribuzione di probabilità valida.

   Alternativamente, si può considerare $I(X;Y)$ in funzione di tutte le probabilità e aggiungere il vincolo $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$ utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

2. Se tutte le righe della matrice delle probabilità di transizione P sono permutazioni di un'unica riga, allora $H(Y|X)$ è indipendente da $\boldsymbol{\alpha}$ ed è sufficiente massimizzare

$H(Y)$. Se il canale non è simmetrico, si esprime $H(Y)$ in funzione di $\boldsymbol{\alpha}$ e si applica ripetutamente la proprietà dimostrata al secondo punto dell'esercizio 4.1. Se si arriva ad una distribuzione di probabilità in uscita $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ indipendente da $\boldsymbol{\alpha}$, allora questa fornisce il valore massimo di $H(Y)$. A titolo di esempio, si consideri

$$H(Y) \;=\; H\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{3},\ \frac{\alpha_2+\alpha_3}{3},\ \frac{\alpha_1+\alpha_3}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

con $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$. Mediando le prime tre probabilità di uscita si ottiene

$$H(Y) \le H\left(\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right)$$

che dà il valore massimo di $H(Y)$ in corrispondenza di $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$, ovvero $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{3}$.

Alternativamente, si può procedere per via numerica utilizzando l'algoritmo di Blahut-Arimoto descritto di seguito:

1. Si inizializza $\boldsymbol{\alpha}^{(0)}=(1/n,\cdots,1/n)$.
2. Per $i=0,1,\ldots$ si eseguono le iterazioni:

$$\begin{cases} c_j(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) & = \exp\left[\sum_k p(y_k|x_j)\ln\dfrac{p(y_k|x_j)}{\sum_\ell \boldsymbol{\alpha}^{(\ell)}p(y_k|x_\ell)}\right] \quad j=1,\cdots,n \\ C^{(i)} & = \sum_j \alpha_j c_j(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}) \\ \alpha_j^{(i+1)} & = \alpha_j^{(i)}\cdot\dfrac{c_j(\boldsymbol{\alpha}^{(i)})}{C^{(i)}} \quad j=1,\cdots,n \end{cases}$$

fino a quando la successione $\{C^{(i)}\}$ converge entro l'approssimazione voluta.

Il teorema di Blahut-Arimoto dimostra che la capacità (in nat) è

$$C \;=\; \lim_{i\to\infty} C^{(i)}\ .$$

Per ottenerla in bit è sufficiente dividere il risultato per $\ln 2$.

Definizione e proprietà del canale simmetrico

Un canale discreto privo di memoria a m ingressi e n uscite è detto *simmetrico* (in senso stretto: esiste una definizione più ampia che noi non consideriamo) se la matrice delle probabilità di transizione P soddisfa le due proprietà seguenti

1. le righe di P sono permutazione di un'unica riga $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$, $\sum_{i=1}^n p_i=1$.
2. le colonne di P sono permutazione di un'unica colonna $(q_1,q_2,\cdots,q_m)$.

Dalla prima proprietà si vede che $H(Y|X)$ dipende soltanto da $(p_1,p_2,\cdots,p_n)$:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 \frac{1}{p(y|x)} \\ &= \sum_x p(x) \sum_y p(y|x) \log_2 \frac{1}{p(y|x)} \\ &= \sum_x p(x)\ H(p_1,p_2,\cdots,p_n) \\ &= H(p_1,p_2,\cdots,p_n)\ . \end{aligned}$$

Dalla seconda proprietà si vede che se i simboli di ingresso sono equiprobabili, tali sono anche i simboli in uscita. Infatti:

$$p(y) \ = \ \sum_x p(x)\ p(y|x) \ = \ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} q_i$$

è costante e non dipende da y, per cui vale $1/n$. Di conseguenza, esiste una configurazione delle probabilità di ingresso corrispondente a uscite equiprobabili e quindi al massimo valore di $H(Y)$, ovvero $\log_2 n$.

Pertanto, la capacità di un canale simmetrico è raggiunta in corrispondenza di simboli di ingresso equiprobabili e vale

$$C \ = \ \log_2 n \ - \ H(p_1,p_2,\cdots,p_n)\ .$$

Soluzione esercizio 3.1

1. La simmetria della funzione discende direttamente dalla commutatività dell'operazione di somma.
2. Il risultato cercato equivale a dimostrare che
$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) - H(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{q}) \ \leq \ 0 \ ,$$
ovvero
$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} + \sum_{j=1}^{m} q_j \log_2 \frac{1}{q_j}\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} \overline{p} \log_2 \frac{1}{\overline{p}} + \sum_{j=1}^{m} q_j \log_2 \frac{1}{q_j}\right] \ \leq \ 0 \ .$$
Sostituendo a $\overline{p}$ il suo valore $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$, si ottiene
$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{\overline{p}} \ \leq \ 0 \ .$$
Per dimostrare questa disuguaglianza si può utilizzare la disequazione $\log_2 x \leq \log_2 e \ (x-1)$:
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \ - \ \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{\overline{p}} \ &= \ \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{\overline{p}}{p_i} \\
&\leq \ \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\overline{p}}{p_i} - 1\right) \cdot \log_2 e \\
&= \ \log_2 e \ \sum_{i=1}^{n} (\overline{p} - p_i) = 0,
\end{aligned}$$
che dimostra il risultato richiesto.
3. Applicando il risultato precedente, si ottiene
$$H(p_1,p_2,\cdots,p_n) \ \leq \ H(1/n,1/n,\cdots,1/n) \ = \ \sum_{i=1}^{n} (1/n) \log_2 n \ = \ \log_2 n \ .$$
4. Dalla disuguaglianza $\ln x \geq 1 - 1/x \ \forall x > 0$ si ottiene
$$\begin{aligned}
&H(\alpha\boldsymbol{p} + (1-\alpha)\boldsymbol{q}) - \alpha H(\boldsymbol{p}) - (1-\alpha)H(\boldsymbol{q}) \\
&= \ \alpha \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{p_i}{\alpha p_i + (1-\alpha) q_i} + \ (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} q_i \log_2 \frac{q_i}{\alpha p_i + (1-\alpha) q_i} \\
&\geq \ \left\{\alpha \sum_{i=1}^{n} p_i \left[1 - \frac{\alpha p_i + (1-\alpha) q_i}{p_i}\right] + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} q_i \left[1 - \frac{\alpha p_i + (1-\alpha) q_i}{q_i}\right]\right\} \cdot \log_2 e \\
&= 0
\end{aligned}$$
e quindi $H(\boldsymbol{p})$ è convessa giù.

Soluzione esercizio 3.2

1. L'alfabeto X^2 è composto dai simboli

$$\{x_1x_1,\ x_1x_2,\ x_2x_1,\ x_2x_2\}\ ,$$

emessi con le probabilità

$$\{p^2,\ pq,\ qp,\ q^2\}\ .$$

L'entropia si calcola applicando la definizione:

$$\begin{aligned} H(X^2) &= p^2\log_2\frac{1}{p^2} + 2pq\log_2\frac{1}{pq} + q^2\log_2\frac{1}{q^2} \\ &= 2(p^2+pq)\log_2\frac{1}{p} + 2(pq+q^2)\log_2\frac{1}{q} \\ &= 2H(X)\ . \end{aligned}$$

2. Estendendo il procedimento di cui sopra, l'alfabeto X^n possiede $\binom{n}{k}$ simboli con k x_1 e $(n-k)$ x_2 che si presentano con la stessa probabilità p^kq^{n-k}.
Pertanto l'entropia dell'alfabeto vale

$$\begin{aligned} H(X^n) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\log_2\frac{1}{p^kq^{n-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\log_2\frac{1}{p} + \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\log_2\frac{1}{q} \\ &= \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^kq^{n-k}\log_2\frac{1}{p} + \sum_{k=0}^{n-1}n\binom{n-1}{k}p^kq^{n-k}\log_2\frac{1}{q} \\ &= np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^kq^{n-1-k}\log_2\frac{1}{p} + nq\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^kq^{n-1-k}\log_2\frac{1}{q} \\ &= np(p+q)^{n-1}\log_2\frac{1}{p} + nq(p+q)^{n-1}\log_2\frac{1}{q} \\ &= np\log_2\frac{1}{p} + nq\log_2\frac{1}{q} \\ &= nH(X)\ . \end{aligned}$$

Si osservino con attenzione le relazioni utilizzate per la semplificazione dei coefficienti binomiali.

Soluzione esercizio 3.3

1. La codifica di Huffman, in questo caso, richiede un bit per ognuno dei due simboli:

$$\overline{n}_1 \;=\; 0.9\cdot 1 + 0.1\cdot 1 \;=\; 1\ .$$

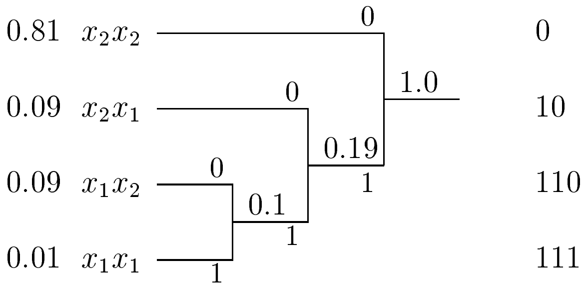
L'entropia vale

$$H(X) \;=\; H(0.1) \;=\; 0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.9 \cdot \log_2 \frac{1}{0.9} \;=\; 0.47 \text{ bit/simbolo} \;.$$

e quindi l'efficienza di codifica è

$$\varepsilon_1 \;=\; \frac{H(X)}{\overline{n}_1} \;=\; 0.47 \;.$$

2. In questo caso la codifica di Huffman non è banale e occorre procedere come descritto in figura:



Dallo schema riportato si ricava il numero medio di bit per simbolo codificato:

$$\overline{n}_2 \;=\; 0.01 \cdot 3 + 0.09 \cdot 3 + 0.09 \cdot 2 + 0.81 \cdot 1 \;=\; 1.29 \;.$$

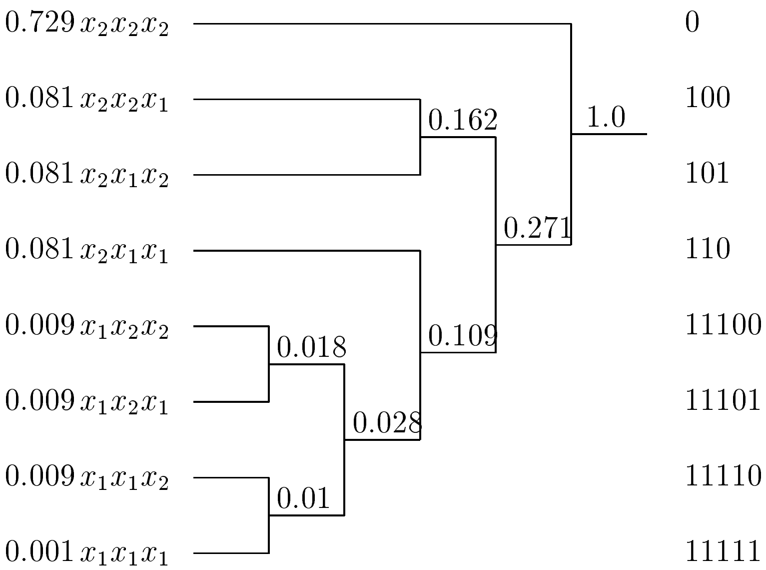
L'entropia vale

$$H(X^2) \;=\; 2H(X) \;=\; 2 \cdot 0.47 \;=\; 0.94 \text{ bit/simbolo} \;,$$

e quindi l'efficienza di codifica è

$$\varepsilon_2 \;=\; \frac{0.94}{1.29} \;=\; 0.73 \;.$$

3. La codifica di Huffman di X^3 è descritta dalla figura seguente:



Dallo schema riportato in figura si ricava il numero medio di bit per simbolo codificato:

$$\overline{n}_3 \;=\; 0.028 \cdot 5 + (0.081 + 0.162) \cdot 3 + 0.729 \cdot 1 \;=\; 1.598 \; .$$

L'entropia vale

$$H(X^3) \;=\; 3H(X) \;=\; 3 \cdot 0.47 \;=\; 1.41 \text{ bit/simbolo} \; ,$$

e quindi l'efficienza di codifica è

$$\varepsilon_3 \;=\; \frac{1.41}{1.598} \;=\; 0.88 \; .$$

4. In questo caso si ottengono i risultati:

$$\begin{cases} H(X^4) & = \; 1.88 \text{ bit/simbolo} \\ \overline{n}_4 & = \; 1.97 \text{ bit/simbolo} \\ \varepsilon_4 & = \; 0.95 \end{cases}$$

Dai risultati ottenuti si vede che, in generale, l'efficienza di codifica di sorgente migliora codificando alfabeti prodotto di ordine crescente.

Soluzione esercizio 3.4

1. Secondo i dati del problema, i blocchi codificati sono solo quelli che contengono da 0 a 3 x_1, per cui il loro numero è

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{100}{k} \;=\; 1 + 100 + 4950 + 161700 \;=\; 166751 \; .$$

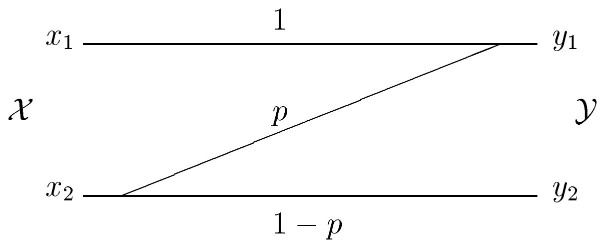
Supponendo di codificare a lunghezza fissa, occorrono almeno

$$\lceil \log_2 166751 \rceil \;=\; 18 \text{ bit/blocco} \; .$$

2. Con lo schema di codifica proposto, la probabilità che un blocco non sia codificato è uguale alla probabilità che esso contenga più di tre simboli x_1. Poiché $P\{x_1\} = 0.005$, si ha

$$\begin{aligned} P\{\text{blocco non codificato}\} &= \sum_{k=4}^{100} \binom{100}{k} \, 0.005^k \, 0.995^{100-k} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{100}{k} \, 0.005^k \, 0.995^{100-k} \\ &= 1.67 \cdot 10^{-3} \; . \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 3.5



1. Assumiamo che le probabilità dei simboli in ingresso al canale siano
$$P\{x_1\} = \alpha \qquad P\{x_2\} = 1-\alpha = \beta \; .$$
Poniamo inoltre $q = 1-p$. Dalle ipotesi fatte e dalle probabilità di transizione del canale si ricava facilmente:
$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= -(\alpha+\beta p)\log_2(\alpha+\beta p) - \beta q \log_2(\beta q) + \alpha \log_2 1 + \beta p \log_2 p + \beta q \log_2 q \\ &= H(\beta q) - \beta H(q) \\ &= \beta p \log_2 p - \beta q \log_2 \beta - (1-\beta q)\log_2(1-\beta q) \end{aligned}$$
Quindi, prendendo la derivata di $I(X;Y)$ rispetto a β e annullandola, si ottiene:
$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = p\log_2 p - q\log_2 \beta - q \log_2 e + q\log_2(1-\beta q) + q\log_2 e = 0 \; ,$$
da cui
$$q \log_2 \frac{1-\beta q}{\beta q} = -p\log_2 p - q \log_2 q = H(p) \; ,$$
e quindi
$$\beta = \frac{1}{q\left[1+2^{H(p)/q}\right]} \; .$$
Sostituendo, si ottiene l'espressione della capacità di canale:
$$C = H\left(\frac{1}{1+2^{H(p)/q}}\right) - \frac{H(p)}{q\left[1+2^{H(p)/q}\right]} \; .$$

2. Mettendo in cascata n canali di questo tipo, si ottiene un canale equivalente ancora dello stesso tipo definito dalle probabilità $p_n = 1-q_n$. q_n è facile da calcolare in quanto l'unico evento che può dare origine alla ricezione di y_2 dato che è stato trasmesso x_2 implica che si sia percorso sempre soltanto il ramo inferiore del diagramma rappresentante il canale, per cui
$$q_n = q^n \qquad p_n = 1-q^n \; .$$
Si può quindi applicare la formula del punto precedente e ottenere la capacità della cascata di n canali:
$$C_n = H\left(\frac{1}{1+2^{H(q^n)/q^n}}\right) - \frac{H(q^n)}{q^n\left[1+2^{H(q^n)/q^n}\right]} \; .$$

3. Poiché $p > 0$, sarà anche $q < 1$ e quindi $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} C_n &= \lim_{x\to 0} H\left(\frac{1}{1+2^{H(x)/x}}\right) - \frac{H(x)}{x\,[1+2^{H(x)/x}]}\\ &= \lim_{x\to 0} H\left(\frac{1}{1+1/x}\right) - \frac{H(x)}{x+1}\\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

Risultato analogo si ottiene osservando che

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{bmatrix}^n = \lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-q^n & q^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

corrispondente a un canale con capacità nulla.

Soluzione esercizio 3.6

La probabilità di errore equivalente della cascata dei due canali binari simmetrici con probabilità di errore p e p' è

$$p_{\text{eq}} = pq' + p'q = qp' + pq' \ .$$

La capacità di questo canale è data da

$$C_{\text{eq}} = 1 - H(p_{\text{eq}}) \ ,$$

per cui l'asserto del problema è dimostrato se

$$H(p_{\text{eq}}) > H(p) \qquad \text{e} \qquad H(p_{\text{eq}}) > H(q) \ ;$$

per simmetria, è sufficiente dimostrare una sola delle disuguaglianze. Poiché la funzione $H(p)$ è monotona crescente su (0,1/2) e monotona decrescente su (1/2,1), la prima disuguaglianza è equivalente a

$$p < p_{\text{eq}} < q \ ,$$

avendo fatto l'ipotesi che $p < 1/2$. Quindi

$$p < pq' + p'q < q \quad \Longleftrightarrow \quad pp' < p'q \ \ \& \ \ pq' < q'q \quad \Longleftrightarrow \quad p < q \ \ \& \ \ p < q \ ,$$

e poiché l'ultima disuguaglianza è sempre verificata, cosí è la prima, dimostrando quanto asserito.

Soluzione esercizio 3.7

La cascata di due canali binari simmetrici (BSC) è ancora un canale binario simmetrico come visto nell'esercizio precedente.

Facciamo l'ipotesi che la cascata di n BSC sia ancora un BSC. Quindi, essendo la cascata di $n+1$ BSC equivalente alla cascata di n BSC in cascata con l'$(n+1)$-esimo BSC, ovvero

la cascata di due BSC, ovvero ancora un BSC, abbiamo dimostrato che se l'ipotesi è vera per n, lo è anche per $n+1$.
Poiché abbiamo visto che l'ipotesi è vera per $n = 2$ allora, per induzione, essa è vera per ogni n
La matrice delle probabilità di transizione della cascata di n BSC è

$$P^n = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} p_n & q_n \\ q_n & p_n \end{bmatrix} .$$

L'equazione ricorrente per p_n è

$$p_n = qp_{n-1} + pq_{n-1} = p + (q-p)p_{n-1} ;$$

da questa si ottiene:

$$p_n = p + (q-p)p + (q-p)^2 p + \cdots + (q-p)^{n-1} p = \frac{1-(q-p)^n}{2}$$

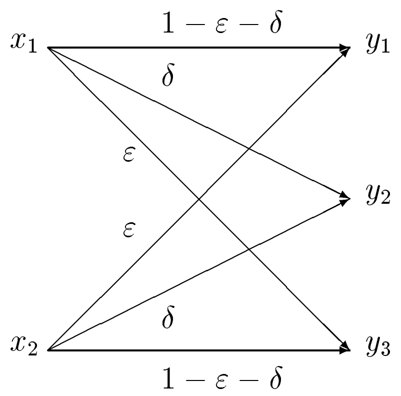
e

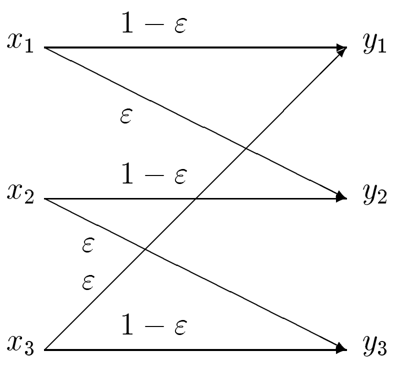
$$q_n = 1 - p_n = \frac{1+(q-p)^n}{2} .$$

Infine, poiché $|q-p| < 1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \text{(canale inutile)}$$

Soluzione esercizio 3.8





1. La matrice delle probabilità di transizione del primo canale è la seguente

$$P = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon-\delta & \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta & 1-\varepsilon-\delta \end{bmatrix}$$

Il canale non è simmetrico secondo la definizione data ma le righe di P sono permutazioni di un'unica riga. Quindi, la capacità è ottenuta massimizzando la $H(Y)$:

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(X)} \ \{H(Y) - H(Y|X)\} \\ &= \max_{p(X)} \ H(Y) \ - \ H(Y|X) \\ &= \max_{0\le\alpha\le1} H(\alpha(1-\varepsilon-\delta) + (1-\alpha)\varepsilon,\, \delta,\, (1-\alpha)(1-\varepsilon-\delta) + \alpha\varepsilon) \\ &\qquad - H(1-\varepsilon-\delta,\, \delta,\, \varepsilon) \end{aligned}$$

Utilizzando il secondo risultato dell'esercizio 4.1 si ottiene, prendendo il valor medio della prima e della terza probabilità del primo termine dell'espressione precedente:

$$H(\alpha(1-\varepsilon-\delta) + (1-\alpha)\varepsilon,\delta,(1-\alpha)(1-\varepsilon-\delta) + \alpha\varepsilon) \ \le \ H((1-\delta)/2,\delta,(1-\delta)/2)$$

Poiché questo valore è assunto dalla funzione per $\alpha = 1/2$, esso rappresenta il suo massimo, per cui

$$C \ = \ H((1-\delta)/2,\delta,(1-\delta)/2) \ - \ H(1-\varepsilon-\delta,\delta,\varepsilon) \ .$$

2. La matrice delle probabilità di transizione del secondo canale è la seguente

$$P \ = \ \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

E' evidente che il canale è simmetrico in quanto le righe sono permutazione di un'unica riga e le colonne sono permutazione di un'unica colonna. Pertanto si ha

$$C \ = \ \log_2 3 - H(Y|X) \ = \ \log_2 3 - H(\varepsilon)$$

Soluzione esercizio 3.9

1. Con la prima regola di decisione, il canale è binario simmetrico con probabilità di errore (supponendo di aver trasmesso x_2)

$$p \ = \ P\{-1+\nu > 0\} \ = \ \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\,\frac{1}{\sqrt{2}} \ = \ 0.159 \ .$$

Di conseguenza, la capacità del canale è

$$C \ = \ 1 - H(p) \ = \ 1 - 0.159 \cdot \log_2 \frac{1}{0.159} - 0.841 \cdot \log_2 \frac{1}{0.841} \ = \ 0.369 \ .$$

2. Con la seconda regola di decisione, il canale diventa simmetrico con cancellatura equivalente al primo dei canali studiati nell'esercizio precedente; le probabilità di

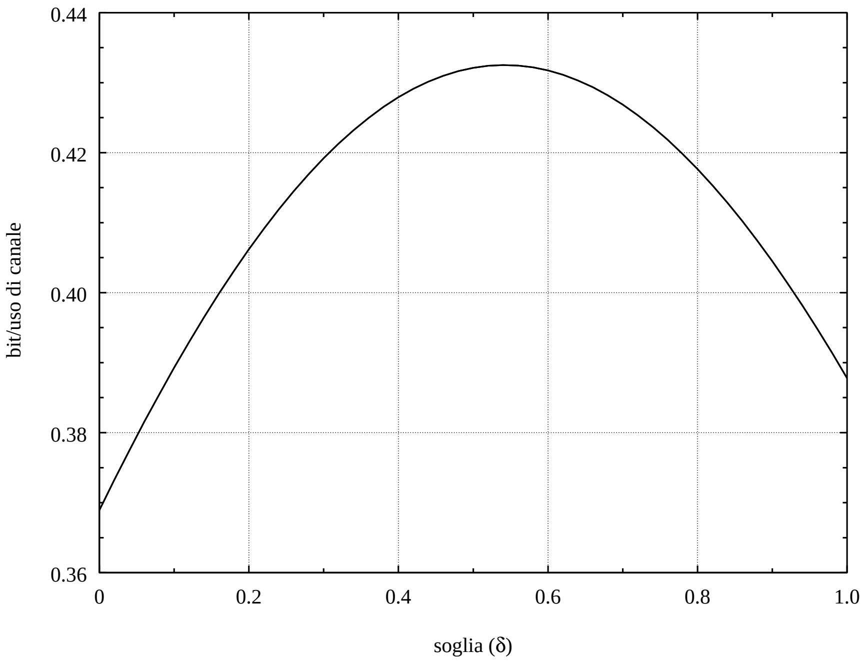
transizione sono

$$\begin{cases} \varepsilon = P\{-\delta < -1+\nu < \delta\} = P\{1-\delta < \nu < 1+\delta\} \\ \qquad = \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\frac{1-\delta}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\frac{1+\delta}{\sqrt{2}} \\ p = P\{-1+\nu > \delta\} = P\{\nu > 1+\delta\} \\ \qquad = \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\frac{1+\delta}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Con questi valori si trova la capacità utilizzando l'espressione precedentemente trovata:

$$C = H((1-\varepsilon)/2,\, \varepsilon,\, (1-\varepsilon)/2) - H(1-\varepsilon-p,\, \varepsilon,\, p)\ .$$

La figura mostra l'andamento della capacità in funzione di δ. Come si vede, essa presenta un massimo in corrispondenza di $\delta = 0.54$, $C = 0.43$



Capacità del canale in funzione della soglia δ.

Soluzione esercizio 3.10

1. Esplicitando la regola di decodifica si ottiene la seguente matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{bmatrix} q^3 & p^2q & p^2q & p^2q & \varepsilon \\ p^2q & q^3 & p^2q & p^2q & \varepsilon \\ p^2q & p^2q & q^3 & p^2q & \varepsilon \\ p^2q & p^2q & p^2q & q^3 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

   dove $q = 1 - p$ e $\varepsilon = p^3 + 3pq^2$ è la probabilità di errore rivelato, o cancellatura, corrispondente ad un numero dispari (1 o 3) di errori sulla parola codificata.

2. Definendo $\alpha_i = \text{Prob}\{X = x_i\}$, $i = 1{,}2{,}3{,}4$ e $\beta_j = \text{Prob}\{Y = y_j\}$, $j = 1{,}2{,}3{,}4{,}5$ si ha:

$$\begin{cases} \beta_i = \alpha_i q^3 + (1-\alpha_i)p^2q & i = 1{,}2{,}3{,}4 \\ \beta_5 = \varepsilon & \end{cases}$$

   Poiché le righe di P sono permutazioni della stessa riga, $H(Y|X)$ non dipende dalle α_i e quindi, per trovare la capacità di questo canale, è sufficiente rendere massima $H(Y)$:

$$\begin{aligned} H(Y) &= H(\alpha_1 q^3 + \overline{\alpha}_1 p^2q,\, \alpha_2 q^3 + \overline{\alpha}_2 p^2q,\, \alpha_3 q^3 + \overline{\alpha}_3 p^2q,\, \alpha_4 q^3 + \overline{\alpha}_4 p^2q,\, \varepsilon) \\ &\leq H(q_1,\, q_1,\, q_1,\, q_1,\, \varepsilon) \end{aligned}$$

   dove

$$\overline{\alpha}_i = 1 - \alpha_i \qquad \text{e} \qquad q_1 = \frac{q^3 + 3p^2q}{4} .$$

   Il risultato discende dalla proprietà della funzione entropia dimostrata nell'esercizio 4.1, avendo preso la media delle prime 4 probabilità. Poiché questo estremo superiore non dipende dalle α_i ed è effettivamente raggiunto per $\alpha_i = 1/4$, esso è il valore massimo di $H(Y)$, il che prova l'asserto.

3. La capacità di canale è quindi

$$\begin{aligned} C &= H(q_1,\, q_1,\, q_1,\, q_1,\, \varepsilon) \;-\; H(q^3,\, p^2q,\, p^2q,\, p^2q,\, \varepsilon) \\ &= 4q_1 \log_2 \frac{1}{q_1} - 3q(p^2+q^2)\log_2 \frac{1}{q} - 6p^2q \log_2 \frac{1}{p} . \end{aligned}$$

   dove

$$q_1 = \frac{q^3 + 3p^2q}{4} .$$

4. Applicando l'espressione della capacità per $p = 0$, si ottiene

$$C = H(1/4{,}1/4{,}1/4{,}1/4{,}0) - H(1{,}0{,}0{,}0{,}0) = 2 \text{ bit/simbolo} .$$

Soluzione esercizio 3.11

1. I parametri α e β si determinano risolvendo le equazioni

$$\begin{cases} E[L^0] &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta n e^{-\alpha n} &= 1 \\ E[L] &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta n^2 e^{-\alpha n} &= \mu_L \end{cases}$$

Dalle relazioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \beta \dfrac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} &= 1 \\ \beta \dfrac{e^{-\alpha}(1+e^{-\alpha})}{(1-e^{-\alpha})^3} &= \mu_L \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha &= \ln \dfrac{\mu_L + 1}{\mu_L - 1} \\ \beta &= \dfrac{4}{\mu_L^2 - 1} \end{cases}$$

Sostituendo il valore di $\mu_L = 5$, si trova

$$\begin{cases} \alpha &= \ln \dfrac{6}{4} &= 0.405 \\ \beta &= \dfrac{4}{5^2 - 1} &= 0.167 \end{cases}$$

2. Poiché la probabilità che la sorgente emetta una specifica stringa di lunghezza n è

$$\pi_{n,i} = p_n\, p^n \qquad n = 1,2,\ldots;\ i = 1,2,\cdots,M^n\ ,$$

dove $M = 26$, $p = 1/M = 1/26$, $p_n = \beta n e^{-\alpha n}$,$n = 1,2,\ldots$, allora l'entropia di sorgente vale

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{M^n} \pi_{n,i} \log_2 \frac{1}{\pi_{n,i}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M^n p_n p^n \log_2 \frac{1}{p_n p^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\log_2 \frac{1}{p_n} + n \log_2 M \right] \\ &= H(p_1,p_2,\ldots) \ + \ \mu_L \log_2 M \\ &= 3.534 \ + \ 5 \cdot 4.700 \ = \ 27.04 \text{ bit/simbolo} \end{aligned}$$

dove $H(p_1,p_2,\ldots)$ è stato calcolato numericamente.

3. Dal risultato ottenuto si vede che l'entropia della sorgente è composta di due termini:

   - ☐ Il primo termine che rappresenta l'informazione sulla lunghezza della parola emessa ed è anche l'entropia di una sorgente che emette numeri interi con la stessa distribuzione di probabilità della lunghezza delle stringhe emesse.

□ Il secondo termine che rappresenta l'entropia di una sorgente che emette stringhe di lunghezza fissa e pari a μ_L.

Soluzione esercizio 3.12

Le probabilità di transizione del canale equivalente $\mathcal{C}$ si ottengono moltiplicando le probabilità di transizione di ciascun canale per la probabilità di scegliere quel canale, per cui

$$P \;=\; [p\ P_1\ ,\ q\ P_2]\ .$$

Pertanto si ha

$$H(Y|X) \;=\; \sum_{i=1}^{N} pp_i \log_2 \frac{1}{pp_i} \;+\; \sum_{i=1}^{N} qq_i \log_2 \frac{1}{qq_i} \;=\; H(p) + pH(Y_1|X) + qH(Y_2|X)\ .$$

Quindi, al fine di calcolare la capacità è necessario trovare il massimo di $H(Y)$ rispetto alle possibili probabilità dei simboli di ingresso. Se $\boldsymbol{\pi}_X$, $\boldsymbol{\pi}_Y$, $\boldsymbol{\pi}_{Y_1}$ e $\boldsymbol{\pi}_{Y_2}$ sono i vettori delle probabilità dei simboli di ingresso, uscita da $\mathcal{C}$, uscita da $\mathcal{C}_1$ e uscita da $\mathcal{C}_2$, rispettivamente, vale la relazione

$$\boldsymbol{\pi}_Y \;=\; \boldsymbol{\pi}_X\ [p\ P_1\ ,\ q\ P_2] \;=\; [p\ \boldsymbol{\pi}_X\ P_1\ ,\ q\ \boldsymbol{\pi}_X\ P_2] \;=\; [p\ \boldsymbol{\pi}_{Y_1}\ ,\ q\ \boldsymbol{\pi}_{Y_2}]\ .$$

Quindi, si ricava

$$H(Y) \;=\; \sum_{i=1}^{N} p\boldsymbol{\pi}_{Y_1,i} \log_2 \frac{1}{p\boldsymbol{\pi}_{Y_1,i}} \;+\; \sum_{i=1}^{N} p\boldsymbol{\pi}_{Y_2,i} \log_2 \frac{1}{p\boldsymbol{\pi}_{Y_2,i}} \;=\; H(p) + pH(Y_1) + qH(Y_2)\ .$$

Poiché $H(Y_1)$ e $H(Y_2)$ sono massime in corrispondenza di ingressi equiprobabili, tale sarà la loro somma pesata, per cui

$$\max_{\boldsymbol{\pi}_X}\ H(Y) \;=\; H(p) + \log_2 N\ .$$

Pertanto la capacità di $\mathcal{C}$ vale

$$\begin{aligned} C &= [H(p) + \log_2 N] - [H(p) + pH(Y_1|X) + qH(Y_2|X)] \\ &= p[\log_2 N - H(Y_1|X)] \;+\; q[\log_2 N - H(Y_2|X)] \\ &= pC_1 + qC_2\ . \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 3.13

La soluzione di questo esercizio consente di verificare come due modelli di canale apparentemente molto diversi portino entrambi alla stessa capacità di canale.

1. La probabilità di errore del canale equivalente si ottiene considerando i possibili errori alla prima, seconda, ecc. trasmissione dello stesso bit. La probabilità di

ritrasmissione p_r è la probabilità di ricevere all'uscita dei tre BSC una configurazione diversa da 000 o 111:

$$p_r \; = \; 1 - p^3 - q^3 \qquad\qquad (q = 1 - p) \; .$$

Pertanto, la probabilità di errore p' è data dalla somma

$$p' \; = \; p^3 + p^3 p_r + p^3 p_r^2 + \cdots \; = \; \frac{p^3}{1 - p_r} \; .$$

La capacità di questo canale è pertanto

$$C \; = \; 1 - H(p') \; .$$

2. La matrice delle probabilità di transizione del canale a due ingressi e infinite uscite è la seguente:

$$P \; = \; \begin{bmatrix} q^3 & p^3 & q^3 p_r & p^3 p_r & q^3 p_r^2 & p^3 p_r^2 & \\ & & & & & & \cdots \\ p^3 & q^3 & p^3 p_r & q^3 p_r & p^3 p_r^2 & q^3 p_r^2 & \end{bmatrix} \; .$$

La struttura regolare di questa matrice permette di scriverla nel modo seguente:

$$P \; = \; [(1-p_r)P_0 \; , \; (1-p_r)p_r P_0 \; , \; (1-p_r)p_r^2 P_0 \quad \cdots \;] \qquad P_0 \; = \; \frac{1}{1 - p_r} \begin{bmatrix} q^3 & p^3 \\ p^3 & q^3 \end{bmatrix} \; .$$

Si osservi che P_0 è anch'essa una matrice di probabilità di transizione e corrisponde al canale binario simmetrico equivalente considerato al punto precedente con probabilità di errore $p' = p^3/(1 - p_r)$.
Pertanto, si può interpretare il canale come se fosse costituito da infiniti canali binari simmetrici con probabilità di errore p' in cui l'uscita è presa dall'n-esimo canale con probabilità $(1-p_r)p_r^{n-1}$. Pertanto, generalizzando il risultato ottenuto nell'esercizio precedente, la capacità di questo canale vale

$$C \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p_r) p_r^{n-1} \, C' \; = \; C' \; = \; 1 - H(p') \; .$$

Verificare che lo stesso risultato si ottiene calcolando la capacità come flusso di informazione in corrispondenza di simboli di ingresso equiprobabili.

Soluzione esercizio 3.14

La distribuzione congiunta delle variabili casuali discrete $X \in \{1, \ldots m\}$ e $Y \in \{1, \ldots n\}$ si può rappresentare come una matrice P di dimensione $m \times n$ dove il generico elemento $p_{ij} = P(X = j, Y = i)$ indica la probabilità che la variabile X assuma il valore i e contemporaneamente la variabile Y assuma il valore j. Avendo a disposizione tale matrice è immediato ricavare le probabilità marginali:

$$P(X = j) \; = \; \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$$

$$P(Y=i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$$

e le probabilità condizionate:

$$\begin{aligned}
P(X=j|Y=i) &= \frac{P(X=j,Y=i)}{P(Y=i)} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_{ik}} \\
P(Y=i|X=j) &= \frac{P(X=j,Y=i)}{P(X=j)} = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{m} p_{kj}}
\end{aligned}$$

Applicando le definizioni di entropia e sostituendo i valori della tabella si ottiene:

$$\begin{aligned}
H(X) &= E\left[\log_2 \frac{1}{P(X)}\right] = \sum_{j=1}^{n} p(X=j) \log_2 \frac{1}{P(X=j)} = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} p_{ij}\right) \log_2 \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}} = 1.8825 \text{ bit}
\end{aligned}$$

$$H(Y) = E\left[\log_2 \frac{1}{P(Y)}\right] = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\right) \log_2 \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}} = 1.8814 \text{ bit}$$

$$\begin{aligned}
H(X|Y) &= E\left[\log_2 \frac{1}{P(X|Y)}\right] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \log_2 \frac{1}{\frac{p_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_{ik}}} = 1.6478 \text{ bit} \\
I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) = 0.2346 \text{ bit}
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 3.15

In base alla definizione di entropia si ha:

$$\begin{aligned}
H(X_1,\ldots,X_N) &= E\left[\log_2 \frac{1}{P(X_1,\ldots,X_N)}\right] = \\
&= \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_N} P(X_1,\ldots,X_N) \log_2 \frac{1}{P(X_N|X_{N-1},\ldots,X_1)} +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_N} P(X_1, \ldots, X_N) \log_2 \frac{1}{P(X_{N-1}, \ldots, X_1)} = \\
&= E\left[\log_2 \frac{1}{P(X_N|X_{N-1}, \ldots, X_1)}\right] + E\left[\log_2 \frac{1}{P(X_{N-1}, \ldots, X_1)}\right] = \\
&= H(X_N|X_1, \ldots, X_{N-1}) + H(X_1, \ldots, X_{N-1})
\end{aligned}
$$

Si proceda quindi iterativamente esprimendo

$$H(X_1, \ldots, X_{N-1}) = H(X_{N-1}|X_1, \ldots, X_{N-2}) + H(X_1, \ldots, X_{N-2})$$

e così via. Per dimostrare la seconda identità si proceda nello stesso modo. Si ha:

$$
\begin{aligned}
I(X_1, \ldots, X_N; Y) &= H(X_1, \ldots, X_N) - H(X_1, \ldots, X_N|Y) = \\
&= H(X_N|X_1, \ldots, X_{N-1}) + H(X_1, \ldots, X_{N-1}) + \\
&- H(X_N|X_{N-1}, \ldots, X_1, Y) - H(X_1, \ldots, X_{N-1}|Y) = \\
&= I(X_1, \ldots, X_{N-1}; Y) + I(X_N; Y|X_1, \ldots, X_{N-1})
\end{aligned}
$$

Soluzione esercizio 3.16

Si utilizzino le definizioni e le proprietà dell'entropia:

1.

$$H(X,Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|Z,X) \geq H(X|Z)$$

poiché $H(Y|Z,X) \geq 0$

2.

$$I(X,Y;Z) = I(X;Z) + I(Y;Z|X) \geq I(X;Z)$$

essendo $I(Y;Z|X) \geq 0$

3.

$$
\begin{aligned}
H(X,Y,Z) - H(X,Y) &= H(X,Z) + H(Y|X,Z) - [H(X) + H(Y|X)] = \\
&= H(X,Z) - H(X) + [H(Y|X,Z) - H(Y|X)]
\end{aligned}
$$

Per la proprietà in base alla quale il condizionamento riduce l'entropia (ovvero l'incertezza), è possibile affermare che il termine compreso tra parentesi quadre è senz'altro minore o al limite uguale a zero, dunque risulta:

$$H(X,Y,Z) - H(X,Y) \leq H(X,Z) - H(X)$$

4.

$$I(X;Z|Y) = I(X,Y;Z) - I(Y;Z) = I(X;Z) + I(Y;Z|X) - I(Y;Z)$$

In questo caso vale la relazione con uguaglianza.

Soluzione esercizio 3.17

Si analizzino le possibili sequenze che si possono ottenere al variare della lunghezza, cioè per i possibili valori della variabile casuale $Y = \{1, \ldots ,5\}$:

- Y=3.
  In questo caso le possibili sequenze sono due[1], cioè:
  $$X \in \{AAA,BBB\} \;\Rightarrow\; N_3 = 2$$
- Y=4.
  Le possibili sequenze di lunghezza 4 sono:
  $$X \in \{BAAA,ABAA,AABA,ABBB,BABB,BBAB\} \;\Rightarrow\; N_4 = 6$$
  Si noti che per calcolare il numero di sequenze per $Y = 4$ è sufficiente considerare la relazione:
  $$N_4 = 2 \cdot \binom{4}{1} - N_3 = 8 - 2 = 6$$
- Y=5.
  Alcune sequenze di lunghezza 5 sono: $X \in \{AABBA,BABAA, \ldots ,ABABA\}$. Il numero di tali sequenze è:
  $$N_5 = 2 \cdot \binom{5}{2} - N_4 - N_3 = 20 - 6 - 2 = 12$$

Poiché gli incontri sono statisticamente indipendenti e ciascuna squadra ha la stessa probabilità di vincere, è possibile scrivere la probabilità congiunta di X e Y come:

$$\begin{aligned} P(X,Y = 3) &= 2^{-3} \\ P(X,Y = 4) &= 2^{-4} \\ P(X,Y = 5) &= 2^{-5} \end{aligned}$$

L'entropia della variabile casuale X è:

$$\begin{aligned} H(X) &= N_3 \cdot P(X,Y = 3) \log_2 \frac{1}{P(X,Y = 3)} + N_4 \cdot P(X,Y = 4) \log_2 \frac{1}{P(X,Y = 4)} + \\ &+ N_5 \cdot P(X,Y = 5) \log_2 \frac{1}{P(X,Y = 5)} = \frac{2 \cdot 3}{8} + \frac{6 \cdot 4}{16} + \frac{12 \cdot 5}{32} = 4.125 \text{ bit} \end{aligned}$$

Si consideri ora la probabilità marginale della variabile Y:

$$\begin{aligned} P(Y = 3) &= N_3 \cdot P(X,Y = 3) = 2^{-2} \\ P(Y = 4) &= N_4 \cdot P(X,Y = 4) = 3 \cdot 2^{-3} \\ P(Y = 5) &= N_5 \cdot P(X,Y = 5) = 3 \cdot 2^{-3} \end{aligned}$$

[1] Si indica con N_i il numero di sequenze aventi lunghezza i

L'entropia della variabile casuale Y risulta:

$$\begin{aligned} H(Y) &= P(Y=3)\log_2\frac{1}{P(Y=3)} + P(Y=4)\log_2\frac{1}{P(Y=4)} + P(Y=5)\log_2\frac{1}{P(Y=5)} = \\ &= 2\cdot 2^{-2} + 2\left[3\cdot 2^{-3}\log_2\frac{1}{3\cdot 2^{-3}}\right] = 1.5612 \text{ bit} \end{aligned}$$

Poiché la variabile casuale Y è funzione della variabile X, è possibile concludere che non vi è incertezza su Y che è determinata da X. Valgono dunque le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= 0 \\ I(X;Y) &= H(Y) \\ H(X,Y) &= H(X) + H(Y|X) = H(X) \end{aligned}$$

Inoltre si ha:

$$H(X|Y) = H(X,Y) - I(X;Y) = H(X,Y) - H(Y) = H(X) - H(Y) = 2.5638 \text{ bit}$$

Soluzione esercizio 3.18

In base alla definizione di entropia si ha:

$$\begin{aligned} H(Y) &= \sum_y P(Y)\log_2\frac{1}{P(Y)} = \\ &= \sum_{x_1}\alpha\, P(X_1)\log_2\frac{1}{\alpha\, P(X_1)} + \sum_{x_2}(1-\alpha)\, P(X_2)\log_2\frac{1}{(1-\alpha)\, P(X_2)} = \\ &= \alpha H(X_1) + (1-\alpha)H(X_2) + H_2(\alpha) \end{aligned}$$

dove:

$$H_2(\alpha) = \alpha\, \log_2\frac{1}{\alpha} + (1-\alpha)\log_2\frac{1}{1-\alpha}$$

è l'entropia di una variabile binaria che ha distribuzione $\{\alpha, 1-\alpha\}$. Si massimizzi $H(Y)$ rispetto ad α imponendo l'annullamento della derivata:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\alpha}H(Y) &= H(X_1) - H(X_2) + \log_2\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\log 2}\alpha\frac{(-1)}{\alpha^2} - \log_2\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\log 2} = \\ &= H(X_1) - H(X_2) + \log_2\frac{1-\alpha}{\alpha} = 0 \end{aligned}$$

da cui:

$$\alpha = \frac{2^{H(X_1)}}{2^{H(X_1)} + 2^{H(X_2)}}$$

Sostituendo tale valore nell'espressione di $H(Y)$ si ha:

$$H(Y) \le \frac{2^{H(X_1)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}H(X_1)+\frac{2^{H(X_2)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}H(X_2)+H_2\left(\frac{2^{H(X_1)}}{2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}}\right)$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$H(Y) \le \log_2\left(2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)}\right)$$

da cui:

$$2^{H(Y)} \le 2^{H(X_1)}+2^{H(X_2)} \ .$$

Soluzione esercizio 3.19

In base al teorema del campionamento, per trasmettere un segnale con banda W è possibile trasmettere $R_s = 2W$ campioni indipendenti al secondo. È dunque possibile affermare che il canale Gaussiano additivo limitato in banda con densità spettrale di rumore $N_0/2$ è equivalente al canale tempo-discreto caratterizzato dall'espressione:

$$Y = X + N$$

dove N è distribuito secondo una gaussiana a media nulla e varianza $\sigma^2 = WN_0$ ed è indipendente da X. La capacità di tale canale espressa in bit/simbolo è data dalla relazione:

$$C = \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P}{WN_0}\right)$$

Tenendo conto dei risultati trovati in precedenza, è immediato esprimere la capacità del canale in bit/s:

$$C_W = C\cdot R_s = C\cdot 2W = W\log_2\left(1+\frac{P}{WN_0}\right) = 20\cdot 10^3\log_2\left(1+\frac{1}{40\cdot 10^{-3}}\right) \cong 94 \text{ kbit/s}$$

Soluzione esercizio 3.20

La cardinalità delle due classi S_1 ed S_2 è data da:

$$|S_1| = \text{Numero di stringhe di lunghezza } N \text{ con } 0 \le w \le t \ \text{ zeri} = \sum_{w=0}^{t}\binom{N}{w}$$

$$|S_2| = \text{Numero di stringhe di lunghezza } N \text{ con } t+1 \le w \le N \ \text{ zeri} = 2^N - |S_1|$$

Il numero di bit usati per ciascuna stringa all'interno della classe S_1 sono:

$$n_1 = \lceil \log_2 |S_1| \rceil + 1 \ ,$$

mentre per la classe S_2 si ha:

$$n_2 = \lceil \log_2 |S_2| \rceil + 1$$

Si noti che si è tenuto conto del bit utilizzato per riconoscere la classe di appartenenza. La probabilità che una generica stringa $\mathbf{X}$ appartenga alla classe S_1 è data dalla nota relazione:

$$P(S_1) = \sum_{w=0}^{t} \binom{N}{w} p^w (1-p)^{N-w}$$

Ovviamente deve essere:

$$P(S_1) + P(S_2) = 1$$

dove $P(S_2)$ indica la probabilità che la stringa $\mathbf{X}$ appartenga alla classe S_2. Il numero medio di bit $\bar{n}$ usati per codificare una stringa è dato da:

$$\bar{n} = n_1 P(S_1) + n_2 P(S_2) = n_1 P(S_1) + n_2 [1 - P(S_1)]$$

Per determinare il valore ottimo di t che minimizza $\bar{n}$ è necessario procedere numericamente trovando i vari valori di $\bar{n}$. Costruendo una tabella del tipo:

t	$\bar{n}$
0	19.56
1	14.1
2	12.5
3	13.6
4	15.1
5	17.0
⋮	⋮

Tabella 3.1 Valori di $\bar{n}$ al variare di t.

è facile verificare che l'ottimo si ha per $t = 2$. L'efficienza di codifica è espressa dalla relazione:

$$\eta = \frac{H(X)}{\frac{\bar{n}}{N}} = \frac{24 \cdot 0.327}{12.5} = 0.6287$$

dove $H(X)$ vale:

$$H(X) = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{(1-p)} = 0.327\ .$$

Capitolo 4

Modulazioni analogiche (soluzioni)

Soluzione esercizio 4.1

La trasformata di Fourier di un segnale modulato in ampiezza USB da $x(t)$ è la seguente:

$$\mathring{X}_m(f) \;=\; \mathring{X}(f-f_0) \;=\; 2u(f-f_0)X(f-f_0)\ .$$

Antitrasformando si ottiene

$$x_m(t) \;=\; \Re\left\{[x(t)+j\hat{x}(t)]e^{j2\pi f_0 t}\right\} \;=\; x(t)\cos(2\pi f_0 t) - \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

dove $\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t)$ è la trasformata di Hilbert di $x(t)$. Analogamente, la trasformata di Fourier di un segnale modulato in ampiezza LSB è

$$\mathring{X}_m(f) \;=\; 2u(-f+f_0)X(f-f_0)\ ,$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$x_m(t) \;=\; \Re\left\{[x(t)-j\hat{x}(t)]e^{j2\pi f_0 t}\right\} \;=\; x(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)\ .$$

Mettendo insieme i due risultati precedenti, si ottiene l'espressione del segnale modulato specificato nel problema:

$$x_m(t) \;=\; [x_1(t)+x_2(t)]\cos(2\pi f_0 t) \;-\; [\hat{x}_1(t)-\hat{x}_2(t)]\sin(2\pi f_0 t)\ .$$

La demodulazione coerente consiste nella moltiplicazione per il segnale portante e nel successivo filtraggio passa basso. La prima operazione dà il segnale

$$x_m(t)\cos(2\pi f_0 t) \;=\; \frac{x_1(t)+x_2(t)}{2}[1-\cos(4\pi f_0 t)] \;-\; \frac{\hat{x}_1(t)-\hat{x}_2(t)}{2}\sin(4\pi f_0 t)\ .$$

Il successivo filtraggio lascia passare soltanto la parte in bassa frequenza del segnale precedente, ovvero

$$\frac{x_1(t)+x_2(t)}{2}\ ,$$

per cui la demodulazione coerente del segnale stereofonico dà in uscita un segnale pari alla media dei due canali.

Soluzione esercizio 4.2

1. Il segnale $z(t)$ ottenuto elevando al quadrato il segnale modulato è

$$z(t) \;=\; [x(t)\cos(2\pi f_0 t)]^2 \;=\; \frac{1}{2}[x(t)]^2\;[1+\cos(4\pi f_0 t)]$$

   Dopo il filtraggio passa banda attorno a $2f_0$ si ottiene il segnale $y(t)$

$$y(t) \;=\; \frac{1}{2}[x(t)]^2\cos(4\pi f_0 t) \;=\; \frac{1}{2}[\sigma_x^2 + x'(t)]\cos(4\pi f_0 t)\;,$$

   dove $x'(t) = [x(t)]^2 - \sigma_x^2$. Questo segnale è modulato di inviluppo alla frequenza $2f_0$ da $x'(t)$.

2. Al fine di calcolare l'indice di modulazione di $y(t)$ è sufficiente considerare il segnale $x(t)^2$ il cui spettro di potenza è traslato in frequenza rispetto a quello di $y(t)$. Pertanto, occorre calcolare la funzione di autocorrelazione di $x(t)^2$, il che è possibile facendo ricorso a una proprietà delle variabili casuali gaussiane a valor medio nullo che afferma quanto segue:

   Siano A,B,C,D variabili casuali gaussiane a valor medio nullo, non necessariamente statisticamente indipendenti. Allora vale la proprietà:

$$E[ABCD] \;=\; E[AB]E[CD] \;+\; E[AC]E[BD] \;+\; E[AD]E[BC]\;.$$

   Utilizzando la proprietà di cui sopra, essendo $x(t)$ un processo casuale gaussiano a valor medio nullo, si ottiene

$$\begin{aligned} R_{x^2}(\tau) &= E[x(t)^2 x(t-\tau)^2] \\ &= E[x(t)^2]E[x(t-\tau)^2] \;+\; 2E[x(t)x(t-\tau)]E[x(t)x(t-\tau)] \\ &= \sigma_x^4 + 2R_x(\tau)^2 \end{aligned}$$

   Quindi, prendendo la trasformata di Fourier, si ottiene lo spettro di potenza di $x(t)^2$:

$$G_{x^2}(f) \;=\; \sigma_x^4\delta(f) + 2G_x(f) * G_x(f)\;,$$

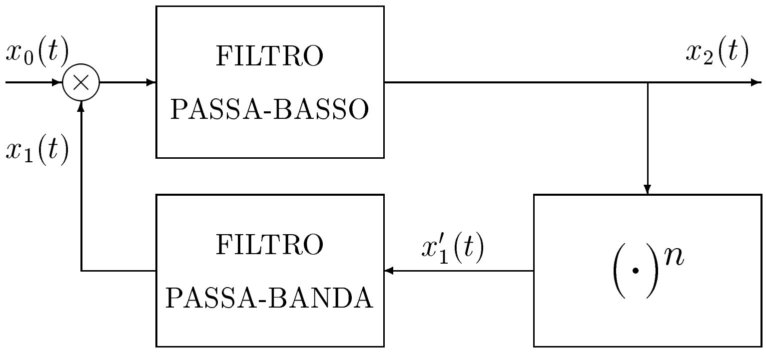
   da cui si vede che la potenza associata alla portante è σ_x^4 mentre quella associata alle bande laterali è

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2G_x(f) * G_x(f)\;df \;=\; 2R_x(0)^2 \;=\; 2\sigma_x^4\;.$$

   Quindi l'indice di modulazione vale

$$m_e \;=\; \frac{2\sigma_x^4}{\sigma_x^4} \;=\; 2\;.$$

Soluzione esercizio 4.3



Analizzando il comportamento del circuito a regime, si osserva in uscita il segnale

$$x_2(t) = K\cos(2\pi f_0 t/m) ,$$

che, elevato alla n-esima potenza, dà il risultato

$$x_1'(t) = [x_2(t)]^n = K^n \cos^n(2\pi f_0 t/m) = \frac{K^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{j2\pi(2k-n)f_0t/m} .$$

Dopo il filtro passa-banda centrato alla frequenza nf_0/m si ottiene

$$x_1(t) = \frac{K^n}{2^n}\left[e^{j2\pi n f_0 t/m} + e^{-j2\pi n f_0 t/m}\right] = \frac{K^n}{2^{n-1}}\cos(2\pi n f_0 t/m) .$$

Il prodotto con il segnale di ingresso $x_0(t)$ dà:

$$x_0(t)\ x_1(t) = \frac{K^n}{2^n}\left[\cos\frac{2\pi(m+n)f_0t}{m} + \cos\frac{2\pi(m-n)f_0t}{m}\right] ,$$

e dopo il filtro passa-basso diventa

$$\frac{K^n}{2^n}\ \cos\frac{2\pi(m-n)f_0t}{m} .$$

Poiché questo segnale è $x_2(t) = K\cos(2\pi f_0 t/m)$, devono valere le due condizioni

$$\frac{K^n}{2^n} = K ,$$

e

$$\left|\frac{m-n}{m}\right| = \frac{1}{m} .$$

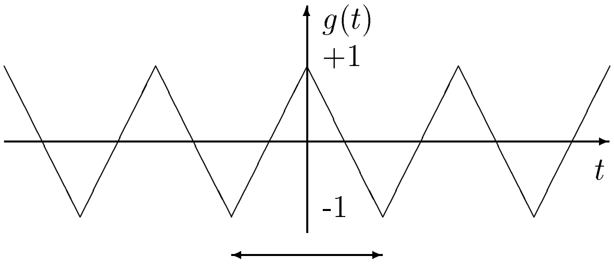
Tali condizioni sono soddisfatte prendendo

$$n = m \pm 1 ,$$

e l'ampiezza del segnale in uscita risulta essere

$$K = 2^{n/(n-1)} .$$

Soluzione esercizio 4.4

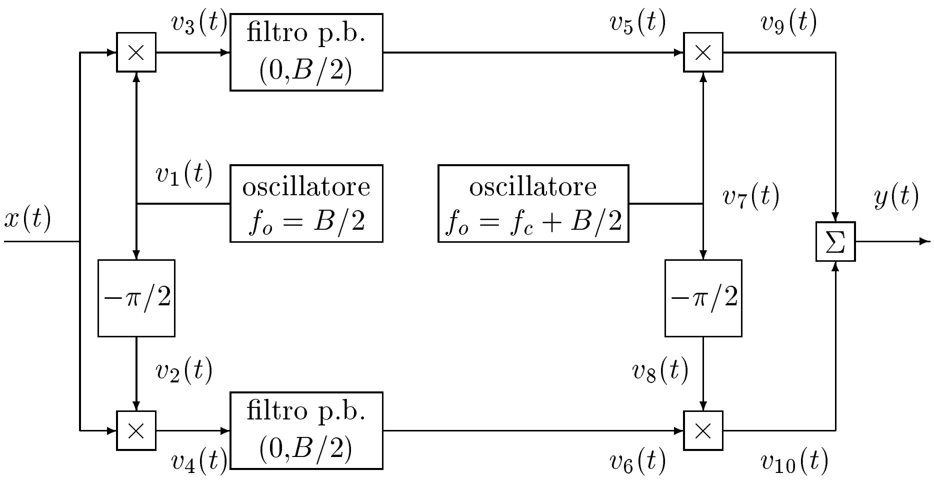


$T = 1/f_c = 1\ \mu$s

1. Poiché il segnale $g(t)$ è periodico di periodo $T = 1/f_c$, può essere sviluppato in serie di Fourier:
$$g(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n\, e^{j2\pi nt/T}\ ,$$
dove i coefficienti g_n sono dati dalle relazioni
$$g_n \;=\; \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, e^{-j2\pi nt/T}\, dt\ .$$
Di conseguenza, il segnale prodotto di $g(t)$ e $x(t)$ può essere scritto come
$$x(t)g(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n\, x(t)\, e^{j2\pi nf_c t}\ .$$
Poiché $x(t)$ ha banda B, il segnale ottenuto dopo il filtro passa-banda centrato alla frequenza f_c è
$$y(t) \;=\; \left[g_{-1}e^{-j2\pi f_c t} + g_1 e^{j2\pi f_c t}\right]\, x(t)\ .$$
Essendo $g(t)$ reale, vale la relazione $g_{-1} = g_1^*$, da cui, scomponendo g_1 in modulo (A) e fase (φ), si ottiene
$$y(t) \;=\; 2A\cos(2\pi f_c t + \varphi)\, x(t)\ .$$

2. Occorre innanzitutto calcolare il valore di g_1 per la $g(t)$ specificata nell'esercizio.
$$g_1 \;=\; \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, e^{-j2\pi t/T}\, dt \;=\; \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}(1-4t/T)\, \cos(2\pi t/T)\, dt \;=\; \frac{4}{\pi^2}\ .$$
Quindi il segnale $y(t)$ risulta
$$y(t) \;=\; \frac{8}{\pi^2}\, \cos(2\pi f_c t)\, \cos(2\pi f_0 t)\ ,$$
in quanto la banda del segnale modulante, f_0, soddisfa la relazione $2f_0 < f_c$.

Soluzione esercizio 4.5



Per trovare la relazione ingresso-uscita del sistema occorre analizzare i segnali presenti al suo interno.

1. Il segnale in uscita dal primo oscillatore locale è

$$v_1(t) \;=\; \cos(\pi Bt) \;.$$

2. Il segnale $v_1(t)$ sfasato di $-\pi/2$ radianti diventa

$$v_2(t) \;=\; \cos(\pi Bt - \pi/2) \;=\; \sin(\pi Bt) \;.$$

3. Il prodotto del segnale modulante $x(t)$ per $v_1(t)$ dà

$$v_3(t) \;=\; x(t)\cos(\pi Bt) \;,$$

   e passando in frequenza:

$$V_3(f) \;=\; \frac{1}{2}\left[X(f+B/2) + X(f-B/2)\right] \;.$$

4. Il prodotto del segnale modulante $x(t)$ per $v_2(t)$ dà

$$v_4(t) \;=\; x(t)\sin(\pi Bt) \;,$$

   e passando in frequenza:

$$V_4(f) \;=\; \frac{1}{2j}\left[-X(f+B/2) + X(f-B/2)\right] \;.$$

5. Scomponendo lo spettro del segnale modulante nelle parti corrispondenti alle frequenza negative e positive, $X_-(f)$ e $X_+(f)$, si possono esprimere i segnali in uscita dai filtri passa-basso con banda $B/2$ come segue:

$$V_5(f) \;=\; \frac{1}{2}\left[X_+(f+B/2) + X_-(f-B/2)\right] \;.$$

6. Analogamente, si ottiene
$$V_6(f) \;=\; \frac{1}{2j}\left[-X_+(f+B/2)+X_-(f-B/2)\right] \;.$$

7. Il segnale in uscita dal secondo oscillatore locale è
$$v_7(t) \;=\; \cos[2\pi(f_c+B/2)t] \;.$$

8. Il segnale $v_7(t)$ sfasato di $-\pi/2$ radianti diventa
$$v_8(t) \;=\; \cos[2\pi(f_c+B/2)t-\pi/2] \;=\; \sin[2\pi(f_c+B/2)t]$$

9. Il prodotto del segnale $v_5(t)$ per $v_7(t)$ dà, in frequenza:
$$\begin{aligned} V_9(f) &= \frac{1}{2}\left[V_5(f+f_c+B/2)+V_5(f-f_c-B/2)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[X_+(f+f_c+B)+X_-(f+f_c)+X_+(f-f_c)+X_-(f-f_c-B)\right] \;. \end{aligned}$$

10. Il prodotto del segnale $v_6(t)$ per $v_8(t)$ dà, in frequenza:
$$\begin{aligned} V_{10}(f) &= \frac{1}{2j}\left[-V_6(f+f_c+B/2)+V_6(f-f_c-B/2)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[-X_+(f+f_c+B)+X_-(f+f_c)+X_+(f-f_c)-X_-(f-f_c-B)\right] \;. \end{aligned}$$

11. Infine, il segnale in uscita si ottiene dalla somma di $v_9(t)$ e $v_{10}(t)$; in frequenza, si ha:
$$Y(f) \;=\; V_9(f)+V_{10}(f) \;=\; \frac{1}{2}\left[X_-(f+f_c)+X_+(f-f_c)\right] \;,$$
che corrisponde a un segnale modulato SSB-AM di tipo USB.

Soluzione esercizio 4.6

1. Occorre determinare le potenze del segnale e del rumore dopo il demodulatore. La potenza del segnale è:
$$S \;=\; \int_{-B}^{B} \frac{G_0}{[1+(f/W)^2]^2}\,df \;=\; \frac{G_0 W}{W^2+B^2}\left[WB+(W^2+B^2)\arctan\frac{B}{W}\right] \;.$$
La potenza del rumore è:
$$N \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2[1+(f/W)^2]}\,df \;=\; \frac{\pi}{2}N_0 W \;.$$
Di conseguenza, il rapporto segnale/rumore in funzione di $\rho = W/B$ è dato da
$$\eta \;=\; \frac{2G_0}{\pi N_0}\left[\frac{\rho}{(1+\rho^2)}+\arctan\frac{1}{\rho}\right] \;.$$

E' facile verificare che

$$\lim_{\rho\to\infty} \eta = 0$$

2. Lo sviluppo in serie asintotico si ottiene utilizzando lo sviluppo $\arctan(x) = x - x^3/3 + O(x^4)$ nel modo seguente:

$$\eta \cong \frac{2G_0}{\pi N_0}\left[\frac{6\rho^4 + 2\rho^2 - 1}{3\rho^3(\rho^2+1)}\right] \cong \frac{2G_0}{\pi N_0}\left[\frac{2}{\rho} - \frac{4}{3\rho^3}\right]$$

Soluzione esercizio 4.7

Definiamo

$$\begin{cases} z(t): & \text{segnale trasmesso dal modulatore.} \\ z'(t): & \text{segnale attenuato (attenuazione di potenza } \alpha = 10^{-5}). \\ n(t): & \text{rumore gaussiano bianco additivo con densità spettrale} \\ & \text{di potenza } \frac{N_0}{2} = 10^{-12}\ \text{W/Hz.} \\ r(t): & \text{segnale ricevuto } (z'(t) + n(t)). \\ y(t): & \text{segnale demodulato.} \end{cases}$$

Si vuole ottenere in tutti i casi un rapporto segnale/rumore in uscita $z_u = 10^5$.

1. Con la modulazione DSB-AM con soppressione di portante, il segnale trasmesso è

$$z(t) \;=\; A\ x(t)\ \cos(2\pi f_0 t)$$

e la sua banda è

$$B_z \;=\; 2\ B_x \;=\; 30\ \text{kHz}\ .$$

Il segnale ricevuto è

$$r(t) \;=\; \sqrt{\alpha}\ A\ x(t)\ \cos\ (2\pi f_0 t) \;+\; n(t)\ .$$

Il demodulatore coerente moltiplica il segnale ricevuto per la portante in fase e filtra la componente in bassa frequenza, per cui si ha, a meno di una costante moltiplicativa:

$$y(t) \;=\; \sqrt{\alpha}\ A\ x(t) + n_c(t)\ .$$

Pertanto, il rapporto segnale/rumore in uscita del demodulatore vale

$$z_u \;=\; \frac{\alpha A^2 P_x}{N_0 \cdot 2B_x} \;=\; \frac{\alpha P_z}{N_0 B_x}\ .$$

dove P_x è la potenza del segnale modulante, P_z è la potenza trasmessa e B_x la banda del segnale modulante. Da questa relazione si ricava

$$P_z \;=\; \frac{z_u N_0 B_x}{\alpha} \;=\; \frac{10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-12} \cdot 15 \cdot 10^3}{10^{-5}} \;=\; 300\ \text{W}\ .$$

2. Usando la modulazione AM di inviluppo il segnale trasmesso è

$$z(t) \;=\; A\,[1 + mx(t)]\;\cos\;(2\pi f_0 t)$$

e la sua banda è, anche in questo caso

$$B_z \;=\; 2B_x \;=\; 30 \text{ kHz} \;.$$

Il segnale ricevuto è

$$r(t) \;=\; \sqrt{\alpha}\;A\,[1 + mx(t)]\;\cos(2\pi f_0 t) \;+\; n(t)$$

per cui, dopo la demodulazione coerente, si ottiene

$$y(t) \;=\; \sqrt{\alpha}\;A\,[1 + mx(t)] + n_c(t)\;.$$

Il rapporto segnale/rumore in uscita vale

$$z_u \;=\; \frac{\alpha A^2 m^2 P_x}{2N_0 B_x}$$

e, poiché la potenza trasmessa è

$$P_z \;=\; \frac{A^2}{2}\,[1 + m^2 P_x]\;,$$

si ottiene

$$z_u \;=\; \alpha\;\frac{m^2 P_x}{1 + m^2 P_x}\;\frac{P_z}{N_0 B_x}\;.$$

Da questo risultato si ha

$$P_z \;=\; \frac{z_u N_0 B_x}{\alpha}\;\frac{1 + m^2 P_x}{m^2 P_x} \;=\; \frac{10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-12} \cdot 15 \cdot 10^3}{10^{-5}}\;\frac{1 + 0.5}{0.5} \;=\; 900 \text{ W}\;.$$

3. Poiché la massima deviazione di frequenza è

$$\Delta f_{\max} \;=\; D \cdot B_x \;=\; 5 \cdot 15 \text{ kHz} \;=\; 75 \text{ kHz}\;,$$

la banda del segnale modulato vale

$$B_z \;=\; 2(\Delta f_{\max} + B_x) \;=\; 180 \text{ kHz}\;.$$

L'indice di modulazione è

$$s_f \;=\; \frac{\Delta f_{\max}}{x_{\max}} \;=\; \frac{75 \text{ kHz}}{1 \text{ V}} \;=\; 75 \text{ kHz/V}\;.$$

Il rapporto segnale/rumore in uscita si calcola supponendo che il rumore sia sufficientemente piccolo. In questo modo, si può approssimare il rapporto segnale/rumore con il rapporto tra la potenza del segnale in assenza di rumore e la potenza di rumore in assenza di segnale.

In queste condizioni si dice che il demodulatore lavora sopra soglia.

Scomponendo il rumore nelle sue componenti in banda base, il segnale ricevuto diventa:

$$\begin{aligned} r(t) &= \left\{\sqrt{\alpha}\ A\ \cos\left[2\pi s_f\ \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ d\tau\right]\ +\ n_c(t)\right\}\ \cos\ (2\pi f_0 t) \\ &- \left\{\sqrt{\alpha}\ A\ \sin\left[2\pi s_f\ \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ d\tau\right]\ +\ n_s(t)\right\}\ \sin\ (2\pi f_0 t)\ . \end{aligned}$$

Il demodulatore ottiene in ricezione il segnale

$$y(t) = \frac{1}{2\pi s_f}\ \frac{d}{dt}\ \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\alpha}\ A\ \sin\left[2\pi s_f\ \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ d\tau\right] + n_s(t)}{\sqrt{\alpha}\ A\ \cos\left[2\pi s_f\ \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ d\tau\right] + n_c(t)}\right\}$$

che, in assenza di rumore, ricostruisce fedelmente $x(t)$.
Pertanto, la potenza del segnale demodulato in assenza di rumore è

$$S\ =\ P_x\ .$$

In assenza di segnale, il demodulatore ottiene in uscita il segnale

$$y(t)\ =\ \frac{1}{2\pi s_f}\ \frac{d}{dt}\ \tan^{-1}\ \frac{n_s(t)}{\sqrt{\alpha}\ A\ +\ n_c(t)}\ \cong\ \frac{1}{2\pi s_f}\ \frac{d}{dt}\ \frac{n_s(t)}{\sqrt{\alpha}\ A}\ =\ \frac{\dot{n}_s(t)}{2\pi\ s_f\ \sqrt{\alpha}\ A}\ .$$

Quindi, la potenza del rumore in assenza di segnale sulla banda del segnale modulante è

$$N\ =\ \frac{1}{(2\pi\ s_f\ \sqrt{\alpha}\ A)^2}\ \int_{-B_x}^{B_x}\ (2\pi f)^2\ N_0\ df\ =\ \frac{2N_0\ B_x^3}{3s_f^2\ \alpha\ A^2}\ .$$

Essendo $P_z = A^2/2$, il rapporto segnale/rumore è

$$z_u\ =\ 3\alpha\ \frac{P_z}{N_0 B_x}\ \frac{s_f^2 P_x}{B_x^2}\ ,$$

da cui

$$P_z\ =\ \frac{z_u N_0 B_x^3}{3\alpha s_f^2 P_x}\ =\ \frac{10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-12} \cdot (15 \cdot 10^3)^3}{3 \cdot 10^{-5} \cdot (75 \cdot 10^3)^2 \cdot 0.5}\ =\ 8\ \mathrm{W}\ .$$

Soluzione esercizio 4.8

Definendo

$$x(t)\ =\ A\cos(2\pi f_m t) \qquad f_m\ =\ 100\ \mathrm{kHz}\ , \quad \frac{A}{\sqrt{2}}\ =\ 0.2\ \mathrm{V}\ ,$$

il segnale modulato in frequenza è

$$\begin{aligned} z(t)\ &=\ A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi s_f \int_0^t A\cos(2\pi f_m \tau)\ d\tau\right] \\ &=\ A_c \cos\left[2\pi f_c t + \frac{A s_f}{f_m}\sin(2\pi f_m t)\right]\ . \end{aligned}$$

Il limite inferiore dell'integrale è posto arbitrariamente in $t = 0$ in quanto esso determina una rotazione di fase del segnale modulato che non influisce sullo spettro di potenza. Definendo $\beta = \frac{As_f}{f_m}$, è noto che $z(t)$ ammette l'espressione seguente:

$$\begin{aligned} z(t) &= \Re\left\{A_c e^{j2\pi[f_c t+\beta\sin(2\pi f_m t)]}\right\} \\ &= \Re\left\{A_c e^{j2\pi f_c t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)\ e^{j2\pi k f_m t}\right\} \\ &= \Re\left\{A_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)\ e^{j2\pi(f_c+kf_m)t}\right\} \end{aligned}$$

dove le $J_k(\cdot)$ sono le funzioni di Bessel di prima specie di ordine k che soddisfano la relazione

$$J_k(\beta) = \int_0^{2\pi} e^{j[\beta\sin x - kx]}\ dx\ .$$

Lo spettro di potenza del segnale analitico è dato dall'espressione

$$\overset{\circ}{G}_z(f) = A_c^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta)^2\ \delta(f - f_c - kf_m)\ ,$$

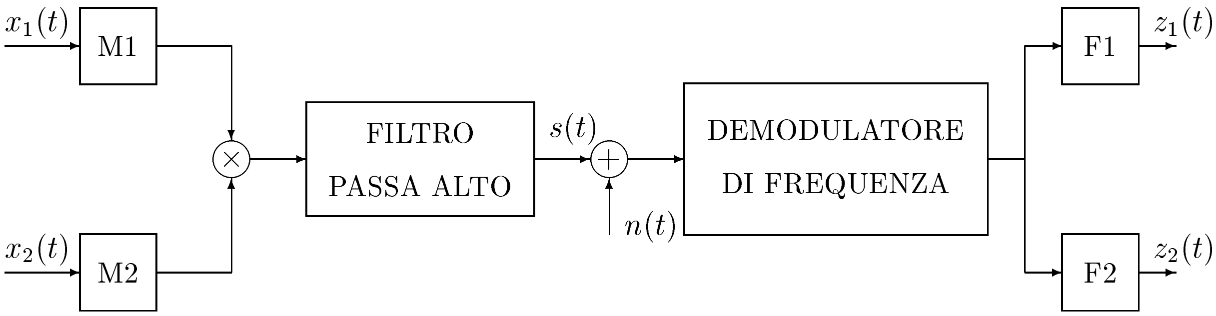
e quindi l'annullamento della riga di portante si ha per

$$J_0(\beta) = 0 \implies \beta = 2.4, 5.5, 8.8, \ldots$$

Pertanto, se il più basso valore di tensione del segnale modulante per cui la riga di portante si annulla è pari a 0.2 V, si ha:

$$s_f = \beta\,\frac{f_m}{A} = 2.4 \cdot \frac{100\ \text{kHz}}{0.2\cdot\sqrt{2}\ \text{V}} = 0.85\ \text{MHz/V}\ .$$

Soluzione esercizio 4.9



1. Definiamo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ i segnali in uscita dei due modulatori di frequenza:

$$y_1(t) = \sqrt{2A}\ \cos[2\pi f_0 t + \psi_1(t)] \qquad y_2(t) = \sqrt{2A}\ \cos[2\pi f_0 t + \psi_2(t)]\ ,$$

dove

$$\psi_1(t) \;=\; 2\pi s_{f1}\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\; d\tau \qquad \psi_2(t) \;=\; 2\pi s_{f2}\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\; d\tau\ .$$

Il prodotto dei due segnali, opportunamente semplificato attraverso note relazioni trigonometriche, dà il risultato seguente:

$$y_1(t)y_2(t) \;=\; A\ \{\cos[2\pi\cdot 2f_0t+\psi_1(t)+\psi_2(t)]+\cos[\psi_1(t)-\psi_2(t)]\}\,.$$

Dopo il filtraggio passa-alto si ottiene il segnale

$$s(t) \;=\; A\ \cos\left[2\pi\cdot 2f_0t+\psi_1(t)+\psi_2(t)\right]\ .$$

In assenza di rumore, il segnale demodulato è:

$$z(t) \;=\; \frac{1}{2\pi s_f}\,\frac{d}{dt}\,[\psi_1(t)+\psi_2(t)] \;=\; \frac{s_{f1}}{s_f}\,x_1(t)+\frac{s_{f2}}{s_f}\,x_2(t)\ ,$$

che, filtrato attraverso F1 e F2, produce i segnali

$$z_1(t) \;=\; \frac{s_{f1}}{s_f}\,x_1(t) \qquad z_2(t) \;=\; \frac{s_{f2}}{s_f}\,x_2(t)$$

2. La deviazione efficace di frequenza di $s(t)$ è

$$(\Delta f_e)^2 \;=\; E[\nu(t)^2] \;=\; E[(s_{f1}x_1(t)+s_{f2}x_2(t))^2] \;=\; E[(s_{f1}x_1(t))^2]+E[(s_{f2}x_2(t))^2]$$

e quindi

$$(\Delta f_e)^2 \;=\; (\Delta f_{e1})^2+(\Delta f_{e2})^2\ .$$

Occorre quindi calcolare i rapporti segnale/rumore sulle due uscite. Innanzitutto, il segnale ricevuto può essere scritto come

$$\begin{aligned} s(t) &= A\ \cos[2\pi\cdot 2f_0t+\psi_1(t)+\psi_2(t)]\ +\ n(t) \\ &= \{A\ \cos[\psi_1(t)+\psi_2(t)]+n_c(t)\}\cos[2\pi\cdot 2f_0t] \\ &- \{A\ \sin[\psi_1(t)+\psi_2(t)]+n_s(t)\}\sin[2\pi\cdot 2f_0t]\ . \end{aligned}$$

Il segnale demodulato prima del filtro che separa le due componenti è

$$z(t) \;=\; \frac{1}{2\pi s_f}\,\frac{d}{dt}\,\tan^{-1}\left\{\frac{A\ \sin[\psi_1(t)+\psi_2(t)]+n_s(t)}{A\ \cos[\psi_1(t)+\psi_2(t)]+n_c(t)}\right\}\ .$$

Da questo si può ottenere la potenza di segnale senza rumore:

$$S_1 \;=\; \frac{s_{f1}^2}{s_f^2}\,E[x_1(t)^2] \;=\; \frac{\Delta f_{e1}^2}{s_f^2} \qquad S_2 \;=\; \frac{s_{f2}^2}{s_f^2}\,E[x_2(t)^2] \;=\; \frac{\Delta f_{e2}^2}{s_f^2}$$

Se il rapporto segnale/rumore è sufficientemente elevato, si può approssimare $z(t)$ (con segnale modulante nullo) come nell'esercizio precedente:

$$z(t) \;\cong\; \frac{\dot{n}_s(t)}{2\pi s_f A}\ .$$

Quindi, la potenza di rumore senza segnale vale

$$N_1 \;=\; \frac{1}{4\pi^2 s_f^2 A^2}\; 2\int_{f_{l1}}^{f_{u1}} |j2\pi f|^2 N_0 \; df \;=\; \frac{2(f_{u1}^3 - f_{l1}^3)N_0}{3s_f^2 A^2}$$

e

$$N_2 \;=\; \frac{1}{4\pi^2 s_f^2 A^2}\; 2\int_{f_{l2}}^{f_{u2}} |j2\pi f|^2 N_0 \; df \;=\; \frac{2(f_{u2}^3 - f_{l2}^3)N_0}{3s_f^2 A^2}$$

avendo indicato con (f_{l1}, f_{u1}) e (f_{l2}, f_{u2}) le bande passanti di F1 e F2.
Si confrontino questi risultati con quello ottenuto nell'esercizio precedente.
Pertanto, la condizione di uguaglianza dei rapporti segnale/rumore equivale a

$$\frac{\Delta f_{e1}^2}{\Delta f_{e2}^2} \;=\; \frac{f_{u1}^3 - f_{l1}^3}{f_{u2}^3 - f_{l2}^3} \;=\; \frac{108^3 - 60^3}{24^3 - 12^3} \;=\; 86.\,29 \; .$$

Questa equazione, unita alla precedente

$$(\Delta f_e)^2 \;=\; (\Delta f_{e1})^2 + (\Delta f_{e2})^2$$

dà i valori di Δf_{e1} e Δf_{e2}:

$$\begin{cases} \Delta f_{e1} & = 994.\,3 \text{ kHz} \\ \Delta f_{e2} & = 107.\,0 \text{ kHz} \end{cases}$$

3. Il rapporto segnale/rumore definito nel terzo punto è dato da

$$(S/N)_0 \;=\; \frac{A^2}{2N_0 W} \;=\; 10^3 \; .$$

Di qui si ricava l'espressione del rapporto segnale/rumore all'uscita

$$\left(\frac{S}{N}\right)_1 \;=\; \frac{3\; A^2\; \Delta f_{e1}^2}{2(f_{u1}^3 - f_{l1}^3)N_0} \;=\; 3(S/N)_0\; W\; \frac{\Delta f_{e1}^2}{f_{u1}^3 - f_{l1}^3} \; .$$

Sostituendo i valori numerici si ha

$$\left(\frac{S}{N}\right)_1 \;=\; 3\cdot 10^3 \cdot 4000 \cdot \frac{994.\,3^2 \cdot 10^6}{(108^3 - 60^3)\cdot 10^9} \;=\; 1.\,14\cdot 10^4 \;\; (40.\,56 \text{ dB}) \; .$$

Soluzione esercizio 4.10

1. Essendo $x(t)$ un processo casuale di tipo gaussiano, ogni sua trasformazione lineare, come

$$x_1(t) \;=\; 2\pi \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\; d\tau \; ,$$

è ancora un processo casuale di tipo gaussiano.

Il segnale $y(t)$ può essere scritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} y(t) &= A\left[\cos(2\pi f_0 t) - x_1(t)\sin(2\pi f_0 t)\right] \\ &= \Re\left\{\left[1 + jx_1(t)\right]\, e^{j2\pi f_0 t}\right\} \end{aligned}$$

Quindi, la deviazione di fase istantanea è data dalla relazione

$$\varphi(t) \;=\; \tan^{-1}[x_1(t)] \;\cong\; x_1(t) - \frac{x_1(t)^3}{3},$$

da cui la frequenza istantanea è

$$\nu(t) \;\cong\; x(t)\;[1 - x_1(t)^2]\;.$$

2. Per il calcolo della deviazione efficace di frequenza, osserviamo innanzitutto che, essendo i processi $x(t)$ e $x_1(t)$ stazionari ($x_1(t)$ è stazionario in quanto uscita di un filtro lineare discontinuo in $f = 0$ ma $X(0) = 0$), si ha

$$E[x(t)x_1(t)] \;=\; R_{xx_1}(0) \;=\; \dot{R}_{x_1}(0) \;=\; 0\;,$$

utilizzando note proprietà delle funzioni di autocorrelazione.

Poiché i processi casuali in questione sono gaussiani a valor medio nullo (lo è $x(t)$ in quanto il suo spettro di potenza non ha componente continua e $x_1(t)$ è una sua trasformazione lineare) essi sono statisticamente indipendenti in corrispondenza dello stesso istante di tempo.

La varianza di $x(t)$ è data dalla relazione

$$\sigma_x^2 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\;df \;=\; 2\int_{F/10}^{F} G_0\;df \;=\; G_0\cdot 2\cdot\frac{9}{10}F \;=\; \frac{9G_0F}{5}\;,$$

e la varianza di $x_1(t)$ è

$$\sigma_1^2 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_x(f)}{f^2}\;df \;=\; 2G_0\int_{F/10}^{F}\frac{df}{f^2} \;=\; \frac{18G_0}{F}\;.$$

La deviazione efficace di frequenza è data dall'espressione

$$m_\nu^2 \;=\; E[\nu^2(t)] \;=\; E\left\{x(t)^2\;[1 - x_1(t)^2]^2\right\} \;=\; \sigma_x^2\;\left[1 - 2\sigma_1^2 + 3\sigma_1^4\right]\;,$$

dove si è utilizzata una nota proprietà delle variabili casuali gaussiane a valor medio nullo e varianza σ^2, secondo cui i momenti di ordine pari sono dati dalla relazione

$$\mu_{2n} \;=\; (2n-1)!!\;\sigma^{2n}$$

mentre i momenti di ordine dispari sono, ovviamente, nulli.

Soluzione esercizio 4.11

Manipolando algebricamente l'integrale a numeratore dell'espressione considerata si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (f - f_0)^2 G_{\overset{\circ}{z}}(f)\, df &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2 G_{\overset{\circ}{z}}(f + f_0)\, df \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |j2\pi f|^2\, G_{\tilde{z}}(f)\, df \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\tilde{z}'}(f)\, df
\end{aligned}$$

dove

1. il primo passaggio consiste in una traslazione della variabile di integrazione;
2. il secondo passaggio deriva dalla definizione di inviluppo complesso in banda base ($\tilde{z}(t)$) e dalla relativa proprietà di traslazione in frequenza dello spettro di potenza ($G_{\tilde{z}}(f) = G_{\overset{\circ}{z}}(f + f_0)$);
3. l'ultimo passaggio è giustificato interpretando il prodotto per $|j2\pi f|^2$ come la trasformazione dello spettro segnale $\tilde{z}$ dovuta al filtraggio attraverso il filtro derivatore ideale la cui trasformata è $j2\pi f$ ($\tilde{z}'$ indica la derivata di $\tilde{z}$ rispetto a t).

Poiché

$$\tilde{z}(t) = e^{j\varphi(t)} ,$$

si ha

$$\tilde{z}'(t) = j\varphi'(t)\, \tilde{z}(t) = j2\pi\nu(t)\, \tilde{z}(t) .$$

Pertanto, applicando la definizione dello spettro di potenza, l'integrale di cui sopra vale

$$E[|\tilde{z}'(t)|^2] = 4\pi^2\, E[\nu(t)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\tilde{z}'}(f)\, df .$$

Similmente, si ha

$$E[|\tilde{z}(t)|^2] = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\tilde{z}}(f)\, df ,$$

da cui si ricava

$$E[\nu(t)^2] = \frac{\dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G_{\tilde{z}'}(f) df}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G_{\tilde{z}}(f) df} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (f - f_0)^2 G_{\overset{\circ}{z}}(f) df}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G_{\overset{\circ}{z}}(f) df} .$$

Soluzione esercizio 4.12

Questo esercizio mostra le differenze di prestazioni in un sistema di trasmissione con modulazione di frequenza (sopra soglia) e rumore di tipo parabolico in banda passante quando si applicano i filtri ottimi di enfasi e di deenfasi.

1. Dagli spettri si ricavano le potenze del segnale e del rumore:

$$\begin{cases} S &= E[x(t)^2] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\ df = \int_{-B}^{B} \frac{\sigma_x^2}{2B}\ df &= \sigma_x^2 \\ N &= E[n(t)^2] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G_n(f)\ df = \int_{-B}^{B} \frac{3\sigma_n^2}{2B^3} f^2\ df &= \sigma_n^2 \end{cases}$$

da cui il rapporto segnale/rumore è

$$\frac{S}{N} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\ .$$

2. La definizione di filtri ottimi di enfasi ($H_T(f)$ in trasmissione) e di deenfasi ($H_R(f)$ in ricezione) è basata su due criteri:

   - □ Non distorsione del segnale ricevuto: implica che il prodotto delle funzioni di trasferimento $H_T(f)H_R(f)$ sia costante in modulo e a fase lineare.
   - □ Massimo rapporto S/N al ricevitore a parità di potenza del segnale trasmesso.

   Dalla prima condizione si ha

$$|H_T(f) \cdot H_R(f)| = H_0 \quad \Longrightarrow \quad |H_T(f)| = \frac{H_0}{|H_R(f)|}\ .$$

   Pertanto, il rapporto segnale/rumore vale

$$\frac{S}{N} = \frac{\displaystyle\int_{-B}^{B} |H_T(f)H_R(f)|^2\ G_x(f)\ df}{\displaystyle\int_{-B}^{B} |H_R(f)|^2\ G_n(f)\ df} = \frac{\displaystyle\int_{-B}^{B} H_0^2\ G_x(f)\ df}{\displaystyle\int_{-B}^{B} |H_R(f)|^2\ G_n(f)\ df}\ .$$

   Poiché si vuole mantenere la stessa potenza del segnale trasmesso rispetto al caso precedente, si ha l'equazione:

$$S_T = \int_{-B}^{B} |H_T(f)|^2\ G_x(f)\ df = \int_{-B}^{B} \frac{H_0^2}{|H_R(f)|^2}\ G_x(f)\ df = \sigma_x^2\ .$$

   A questo punto, osservando che l'espressione del rapporto segnale rumore contiene a numeratore una potenza costante, il problema diventa quello di determinare $|H_R(f)|^2$ in modo da minimizzare la potenza di rumore in ricezione a parità di potenza trasmessa. Questo si può fare ricorrendo al calcolo delle variazioni applicato al funzionale (in $|H_R(f)|^2$)

$$N\left[|H_R(f)|^2\right] = \int_{-B}^{B} |H_R(f)|^2\ G_n(f)\ df$$

   soggetto al vincolo sulla potenza trasmessa

$$\int_{-B}^{B} \frac{H_0^2}{|H_R(f)|^2}\ G_x(f)\ df = \sigma_x^2\ .$$

Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ottiene l'equazione

$$G_n(f) - \lambda \frac{H_0^2}{|H_R(f)|^4} G_x(f) = 0 \quad \Longrightarrow \quad |H_R(f)|^2 = H_0 \sqrt{\lambda \frac{G_x(f)}{G_n(f)}} .$$

Il valore di λ si trova imponendo il vincolo:

$$\sigma_x^2 = \int_{-B}^{B} \frac{H_0^2}{|H_R(f)|^2} G_x(f)\, df = \int_{-B}^{B} \frac{H_0}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{G_x(f)G_n(f)}\, df$$

da cui

$$\sqrt{\lambda_0} = \frac{H_0}{\sigma_x^2} \int_{-B}^{B} \sqrt{G_x(f)G_n(f)}\, df .$$

Sostituendo nell'espressione della $|H_R(f)|^2$, si ottiene:

$$|H_R(f)|^2 = \left[\frac{H_0^2}{\sigma_x^2} \int_{-B}^{B} \sqrt{G_x(f)G_n(f)}\, df\right] \sqrt{\frac{G_x(f)}{G_n(f)}} ,$$

in cui il termine tra parentesi quadre è un'unica costante.
Quindi, la potenza minima di rumore in ricezione vale

$$N = \int_{-B}^{B} |H_R(f)|^2\, G_n(f)\, df = \frac{H_0^2}{\sigma_x^2} \left[\int_{-B}^{B} \sqrt{G_x(f)G_n(f)}\, df\right]^2 ,$$

e il rapporto segnale/rumore ottimale è

$$\frac{S}{N} = \frac{\sigma_x^4}{\left[\int_{-B}^{B} \sqrt{G_x(f)G_n(f)}\, df\right]^2} .$$

La verifica del fatto che si tratta effettivamente di un minimo si ha calcolando la derivata seconda della funzione integranda con il vincolo in corrispondenza del punto di stazionarietà trovato:

$$2\lambda_0 \frac{H_0^2 G_x(f)}{|H_R(f)|^3} > 0 .$$

Sostituendo le espressioni degli spettri di potenza del segnale e del rumore, si ottiene:

$$\int_{-B}^{B} \sqrt{G_x(f)G_n(f)}\, df = \int_{-B}^{B} \sqrt{\frac{3\sigma_x^2\sigma_n^2}{4B^4}\, f^2}\, df = \sqrt{\frac{3}{4}}\, \frac{\sigma_x\sigma_n}{B^2} \cdot 2 \int_{0}^{B} f\, df = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_x\sigma_n$$

$$|H_R(f)|^2 = H_0^2 \frac{B}{|f|} \qquad \text{e} \qquad \frac{S}{N} = \frac{4}{3}\, \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} .$$

da cui si ha un guadagno sul rapporto segnale/rumore di 1.25 dB rispetto al caso precedente. Il vero guadagno nell'uso dei filtri consiste nella maggiore uniformità del disturbo sulla banda del segnale.
In questo caso, lo spettro di potenza del rumore filtrato cresce soltanto come $|f|$ invece che come f^2, senza i filtri.

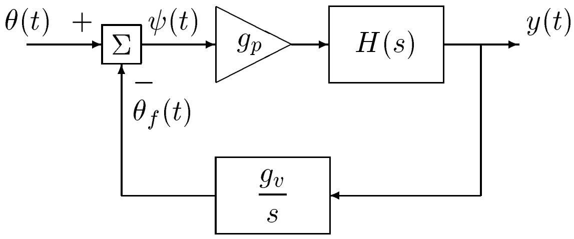
Soluzione esercizio 4.13

1. La costante H_0 necessaria affinché la potenza trasmessa sia σ_x^2 è determinata attraverso l'equazione:
$$\int_{-B}^{B} \frac{\sigma_x^2}{2B} \, \frac{1+f^2/W^2}{H_0^2} \, df \;=\; \sigma_x^2 \, .$$
Calcolando l'integrale si ottiene
$$\frac{\sigma_x^2}{H_0^2} \left[1 + \frac{B^2}{3W^2}\right] \;=\; \sigma_x^2 \, ,$$
da cui
$$H_0 \;=\; \sqrt{1 + \frac{B^2}{3W^2}} \, .$$
2. Poiché il prodotto delle funzioni di trasferimento dei filtri di trasmissione e ricezione è 1, la potenza di segnale in ricezione è uguale a quella del segnale trasmesso, ovvero
$$\int_{-B}^{B} \frac{\sigma_x^2}{2B} \, df \;=\; \sigma_x^2 \, .$$
3. La potenza di rumore in ricezione è
$$N \;=\; \int_{-B}^{B} \frac{3\sigma_n^2}{2B^3} f^2 \frac{H_0^2}{1+f^2/W^2} \, df \;=\; 3\sigma_n^2 \left(\frac{W}{B}\right)^2 \left[1 - \frac{W}{B}\tan^{-1}\frac{B}{W}\right] \left[1 + \frac{B^2}{3W^2}\right] .$$
4. Ponendo $W = xB$, la potenza di rumore diventa
$$N \;=\; \sigma_n^2 \; 3x^2 \left[1 - x\tan^{-1}\frac{1}{x}\right] \left[1 + \frac{1}{3x^2}\right] .$$
Calcolando l'espressione per alcuni valori di x compresi tra 0 e 1 si trova

x	N/σ_n^2
0.0001	0.9998
0.1	0.8785
0.2	0.8124
0.3	0.7826
0.4	0.7753
0.35	0.7768
0.37	0.7758
0.38	0.7755
0.39	0.7754
0.41	0.7755

da cui si ricava che la banda W che rende minima la potenza di rumore è circa $0.40B$ a cui corrisponde una potenza di rumore pari a $0.775\sigma_n^2$.
5. Il guadagno di rapporto segnale/rumore in ricezione in dB è dato da
$$-10\log_{10} 0.775 \;=\; 1.1 \text{ dB} \, .$$

Soluzione esercizio 4.14



In questo circuito (PLL linearizzato)

- □ $\theta(t)$ rappresenta la deviazione di fase del segnale modulato in ingresso
- □ $\theta_f(t)$ la deviazione di fase (meno $\pi/2$) del segnale in uscita dal VCO sintonizzato alla stessa frequenza (con buona approssimazione) del segnale modulato in ingresso e che è quindi modellato come un integratore ideale
- □ $\psi(t)$ è l'approssimazione lineare del segnale di errore
- □ $y(t)$ è il segnale in uscita amplificato e filtrato che pilota il VCO

1. Le funzioni di trasferimento $H_1(s)$ e $H_2(s)$ si ricavano risolvendo le equazioni ai nodi del circuito del dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) \; = \; g_p \; H(s) \; \Psi(s) \quad \text{(nodo di uscita)}$$

$$\Theta(s) - \Psi(s) \; g_p \; H(s) \; \frac{g_v}{s} \; = \; \Psi(s) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(s) \; = \; \frac{s \; \Theta(s)}{s \; + \; g_p \; g_v \; H(s)} \quad \text{(nodo di ingresso)}$$

da cui si ottiene

$$H_1(s) \; = \; \frac{Y(s)}{\Theta(s)} \; = \; \frac{g_p \; s \; H(s)}{s \; + \; g_p \; g_v \; H(s)}$$

e

$$H_2(s) \; = \; \frac{\Psi(s)}{\Theta(s)} \; = \; \frac{s}{s \; + \; g_p \; g_v \; H(s)}$$

2. La fase istantanea del segnale in ingresso

$$\theta(t) \; = \; (2\pi \Delta f t + \Delta\theta) \; u(t)$$

dà luogo alla trasformata di Laplace

$$\Theta(s) \; = \; \frac{2\pi\Delta f}{s^2} + \frac{\Delta\theta}{s} \; .$$

Quindi i due limiti richiesti possono essere calcolati utilizzando il *teorema del valor finale* per le trasformate di Laplace:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \; = \; \lim_{s\to 0^+} sY(s) \; = \; \frac{g_p \; s^2 \; H(s)}{s \; + \; g_p \; g_v \; H(s)} \; \frac{2\pi\Delta f + s\Delta\theta}{s^2}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} s\psi(t) \;=\; \lim_{s\to 0^+} \Psi(s) \;=\; \frac{s^2}{s \;+\; g_p\; g_v\; H(s)} \frac{2\pi\Delta f + s\Delta\theta}{s^2}$$

Consideriamo separatamente i PLL del primo e del secondo ordine.

(a) Con $H(s) = 1$, si ha

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \;=\; \lim_{s\to 0^+} \frac{g_p\; s^2}{s \;+\; g_p\; g_v} \frac{2\pi\Delta f + s\Delta\theta}{s^2} \;=\; \frac{2\pi\Delta f}{g_v}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) \;=\; \lim_{s\to 0^+} \frac{s^2}{s \;+\; g_p\; g_v} \frac{2\pi\Delta f + s\Delta\theta}{s^2} \;=\; \frac{2\pi\Delta f}{g_p g_v}$$

(b) Con $H(s) = (1 + s\tau_1)/(s\tau_2)$, si ha

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \;=\; \lim_{s\to 0^+} \frac{g_p\; s^2\; (1+s\tau_1)}{s^2\tau_2 \;+\; g_p\; g_v\; (1+s\tau_1)} \frac{2\pi\Delta f + s\Delta\theta}{s^2} \;=\; \frac{2\pi\Delta f}{g_v}$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) \;=\; \lim_{s\to 0^+} \frac{s^3\tau_2}{s^2\tau_2 \;+\; g_p\; g_v\; (1+s\tau_1)} \frac{2\pi\Delta f + s\Delta\theta}{s^2} \;=\; 0$$

Questi risultati consentono di affermare che una deriva di fase e/o frequenza del segnale modulato (rappresentata da $\theta(t)$) è completamente recuperata a regime dal PLL del secondo ordine e, a meno di un *offset* di fase, da quello del primo ordine prendendo come segnale "agganciato" quello in uscita del VCO la cui fase istantanea è $\theta_f(t)$.

Soluzione esercizio 4.15

1. Dalla relazione ingresso-uscita si ha

$$y(\theta) \;=\; \begin{cases} -a & -\pi < \theta < -\pi/2 \\ a & -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ -a & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases}$$

sul periodo fondamentale $(-\pi,\pi)$.

Quindi si può ottenere lo sviluppo in serie di Fourier

$$y(\theta) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n\; e^{jn\theta}$$

i cui coefficienti y_n sono

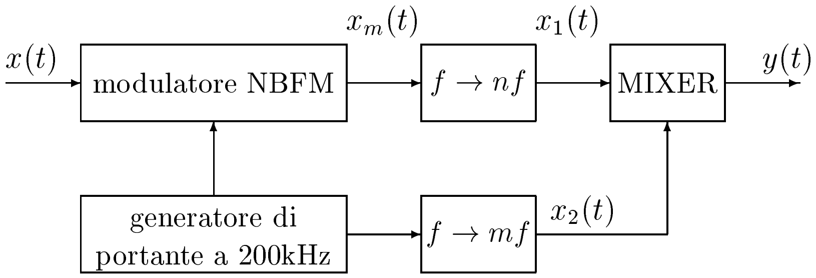
$$y_n \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\theta)\; e^{-jn\theta}\; d\theta \;=\; a\,[\mathrm{sinc}(\pi n/2) - \mathrm{sinc}(\pi n)] \;=\; \begin{cases} \dfrac{2a}{\pi n} & n = 4k+1 \\ -\dfrac{2a}{\pi n} & n = 4k+3 \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

dove $\text{sinc}(x) = \sin x/x$. Quindi si ricava lo sviluppo in serie

$$y(\theta) = \frac{4a}{\pi}\left\{\cos(\theta) - \frac{1}{3}\cos(3\theta) + \frac{1}{5}\cos(5\theta) - \ldots\right\}$$

2. Poiché la frequenza istantanea dei vari contributi nell'espressione del segnale $y(t)$ è pari a $n[f_c + \frac{1}{2\pi}\dot{\varphi}(t)]$, con le ipotesi fatte è possibile dire che si tratta di segnali a banda stretta centrati sulle frequenze nf_c.
   Filtrando intorno alla frequenza f_c, si ottiene il segnale
   $$y(t) = \frac{4a}{\pi}\cos[\theta(t)] .$$

Soluzione esercizio 4.16



In questo esercizio si trova una relazione di carattere generale tra i valori massimi delle deviazioni di fase e di frequenza per un modulatore di frequenza.
Consideriamo il segnale in uscita dal modulatore NBFM:

$$x_m(t) = A\cos[2\pi f_c t + \varphi(t)] \qquad \text{dove} \qquad \varphi(t) = k_f \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau .$$

Manipolando algebricamente questa espressione si ottiene:

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)| &= k_f \left|\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right| \\
&= k_f |x(t) * u(t)| \\
&= k_f \left|\int_{\mathcal{F}} X(f)\left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\right] e^{j2\pi ft}\, df\right| \\
&= k_f \left|\int_{\mathcal{F}} X(f)\,\frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi f}\, df\right| ,
\end{aligned}$$

dove nel terzo passaggio si è presa l'antitrasformata di Fourier del prodotto delle trasformate di $x(t)$ e $u(t)$ e nel quarto si è eliminata la $\delta(f)$ per l'assenza di componente continua (a frequenza 0) in $X(f)$ poiché non è compresa nell'intervallo di integrazione $\mathcal{F} = (-f_M, -f_m) \cup (f_m, f_M)$.

Applicando la disuguaglianza di Schwartz per gli integrali, si ottiene:

$$|\varphi(t)|^2 \;\leq\; 4k_f^2 \int_{f_m}^{f_M} |X(f)|^2 df \int_{f_m}^{f_M} \frac{df}{4\pi^2 f^2}$$
$$= \; 4k_f^2 \, \frac{P_x}{2} \, \frac{1}{4\pi^2} \, \frac{f_M - f_m}{f_m f_M} \; ,$$

da cui si ricava il valore massimo di $|\varphi(t)|^2$:

$$\varphi_{\max} \;=\; \frac{k_f}{2\pi}\sqrt{2P_x \, \frac{f_M - f_m}{f_m f_M}}.$$

Attraverso un procedimento analogo al precedente, è possibile ottenere l'espressione delle massima deviazione di frequenza $\Delta f_{\max}$. Infatti, il valore assoluto della deviazione di frequenza istantanea del segnale modulato è

$$|\Delta f| \;=\; \frac{k_f}{2\pi}|x(t)| \; .$$

Applicando la disuguaglianza di Schwartz si ottiene

$$|x(t)|^2 \;=\; \left|\int_{\mathcal{F}} X(f)e^{j2\pi ft}df\right|^2 \;\leq\; \int_{\mathcal{F}} |X(f)|^2 df \cdot \int_{\mathcal{F}} \left|e^{j2\pi ft}\right|^2 df \;=\; P_x \cdot 2(f_M - f_m) \; .$$

Quindi, la massima deviazione di frequenza è

$$\Delta f_{\max} \;=\; \frac{k_f}{2\pi}\sqrt{2P_x(f_M - f_m)} \;=\; \varphi_{\max}\sqrt{f_m f_M} \; .$$

Questo risultato consente di determinare la massima deviazione di frequenza del modulatore NBFM a partire dalla massima deviazione di fase:

$$\Delta f_{\max} \;=\; 0.15 \text{ rad } \sqrt{30 \cdot 15000} \text{ Hz} \;=\; 100.62 \text{ Hz} \; .$$

Infine, esprimiamo la frequenza centrale e la deviazione di frequenza dei segnali $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $y(t)$ in funzione di f_c e $\Delta f_{\max}$.

- □ La frequenza centrale di $x_1(t)$ è nf_c e la massima deviazione di frequenza è $n\Delta f_{\max}$.
- □ La frequenza centrale di $x_2(t)$ è mf_c e la deviazione di frequenza è nulla, essendo un segnale non modulato.
- □ La frequenza centrale di $y(t)$, ottenuto dal battimento di x_1 con x_2, è $|n \pm m|f_c$ e la massima deviazione di frequenza è $n\Delta f_{\max}$.

A questo punto è possibile rispondere ai quesiti posti.

1. Il parametro n del primo moltiplicatore di frequenza si ottiene imponendo la condizione sulla massima deviazione di frequenza in uscita:

   $$n \cdot 100.62 \text{ Hz} \;=\; 90 \cdot 10^3 \text{ Hz} \;\Longrightarrow\; n \;=\; 894.4 \; .$$

   Affinché la frequenza centrale in uscita sia pari a 108 MHz, deve essere:

   $$|n \pm m| \;=\; \frac{108 \cdot 10^6 \text{ Hz}}{200 \cdot 10^3 \text{ Hz}} \;=\; 540 \;\Longrightarrow\; m \;=\; 894.4 \pm 540 \;=\; \left\{ \begin{array}{l} 354.4 \\ 1434.4 \end{array} \right. .$$

Sebbene entrambi i valori di m soddisfino le specifiche, la scelta cade su quello più basso poiché richiede la realizzazione di un moltiplicatore di frequenza di ordine meno elevato e quindi più semplice da realizzare.

2. L'errore di frequenza sull'oscillatore viene riportato in uscita amplificato del fattore $|n \pm m|$ trovato precedentemente; quindi, se δf_c è l'errore di frequenza della portante in ingresso e $\delta f'_c$ in uscita, si ha
$$\delta f'_c \;=\; |n \pm m| \delta f_c \;=\; 540 \cdot 0.1 \text{ Hz} \;=\; 54 \text{ Hz} .$$
3. Analogamente, l'errore massimo di frequenza in uscita richiede che l'errore di frequenza dell'oscillatore non superi
$$\delta f_c \;=\; \frac{\delta f'_c}{|n \pm m|} \;=\; \frac{1 \text{ Hz}}{540} \;=\; 1.85 \text{ mHz} .$$

Soluzione esercizio 4.17

Passando al dominio della frequenza, la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ contenente l'informazione da trasmettere diviene:
$$X(f) = \Pi(f) + \Lambda(f)$$

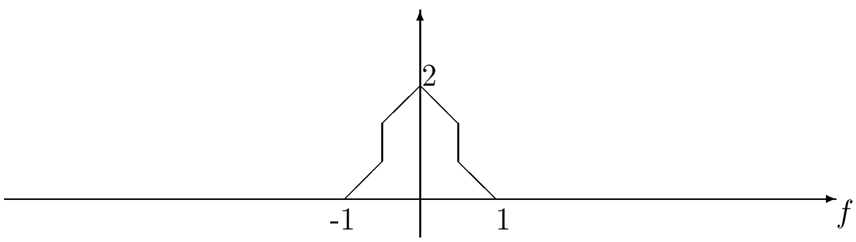


Figura 4.1 Trasformata di Fourier di $x(t)$

Si analizzino ora i vari casi di modulazione:

- AM.

  In questo caso il segnale modulato $s(t)$ ha espressione:
$$s(t) = A\left[1 + mx(t)\right]\cos\left(2\pi f_c t\right)$$
  per cui il suo spettro vale:
$$S(f) = \frac{A}{2}\left[\delta\left(f - f_c\right) + \delta\left(f + f_c\right)\right] + \frac{A}{4}\left[X\left(f - f_c\right) + X\left(f + f_c\right)\right]$$
  essendo $m = \frac{1}{2}$.

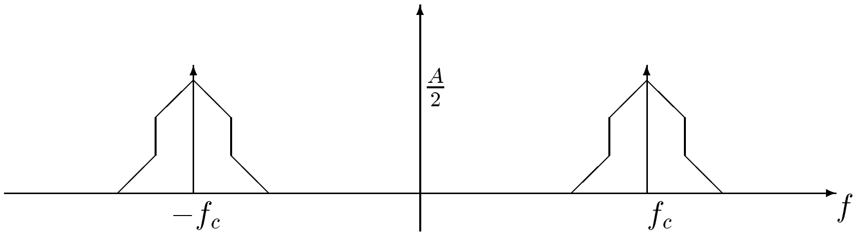


Figura 4.2 Spettro del segnale modulato AM

- DSB.

Nella modulazione di ampiezza di tipo DSB, anche chiamata a portante soppressa in quanto nello spettro di potenza del segnale modulato non compare la riga della portante, il segnale modulato $s(t)$ vale:

$$s(t) = Ax(t)\cos(2\pi f_c t)$$

dunque:

$$S(f) = \frac{A}{2}\left[X(f - f_c) + X(f + f_c)\right]$$

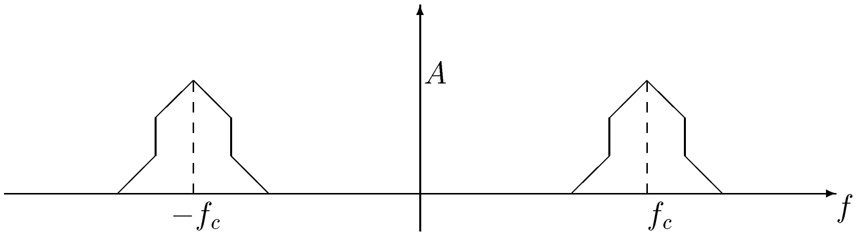


Figura 4.3 Spettro del segnale modulato DSB

- USSB.

Si utilizza la parte positiva dello spettro di $x(t)$ modulando il segnale analitico $\mathring{x}(t)$. L'espressione del segnale modulato è:

$$s(t) = A\left[x(t)\cos(2\pi f_c t) - \hat{x}(t)\sin(2\pi f_c t)\right]$$

dove $\hat{x}(t)$ è la trasformata di Hilbert di $x(t)$. Lo spettro di tale segnale vale:

$$\begin{aligned}
S(f) &= \frac{A}{2}\left[X(f-f_c) + X(f+f_c)\right] + \\
&- \frac{A}{2j}\left[-j\mathrm{sgn}(f-f_c)\, X(f-f_c) + j\mathrm{sgn}(f+f_c)\, X(f+f_c)\right] = \\
&= \frac{A}{2}\left[1 + \mathrm{sgn}(f - f_c)\right] X(f - f_c) + \frac{A}{2}\left[1 - \mathrm{sgn}(f + f_c)\right] X(f + f_c) = \\
&= Au(f - f_c)X(f - f_c) + Au(-f - f_c)X(f + f_c)
\end{aligned}$$

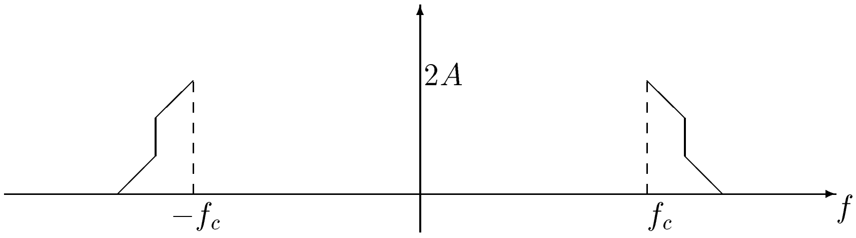


Figura 4.4 Spettro del segnale modulato USSB

- LSSB.
  Si utilizza la parte negativa dello spettro di $x(t)$, quindi $s(t)$ vale:

$$s(t) = A\left[x(t)\cos\left(2\pi f_c t\right) + \hat{x}(t)\sin\left(2\pi f_c t\right)\right]$$

Lo spettro $S(f)$ è:

$$\begin{aligned}
S(f) &= \frac{A}{2}\left[X\left(f-f_c\right) + X\left(f+f_c\right)\right] + \\
&+ \frac{A}{2j}\left[-j\mathrm{sgn}\left(f-f_c\right)X\left(f-f_c\right) + j\mathrm{sgn}\left(f+f_c\right)X\left(f+f_c\right)\right] = \\
&= \frac{A}{2}\left[1-\mathrm{sgn}\left(f-f_c\right)\right]X\left(f-f_c\right) + \frac{A}{2}\left[1+\mathrm{sgn}\left(f+f_c\right)\right]X\left(f+f_c\right) = \\
&= Au(-f+f_c)X(f-f_c) + Au(f+f_c)X(f+f_c)
\end{aligned}$$

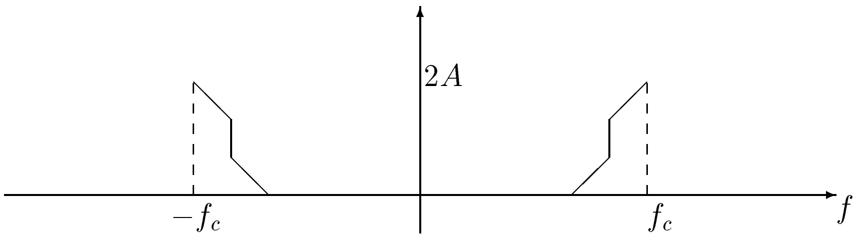


Figura 4.5 Spettro del segnale modulato LSSB

Soluzione esercizio 4.18

Dato il segnale modulato $s(t)$:

$$\begin{aligned}
s(t) = &\ 10\ \cos 2\pi f_c t + \frac{1}{2}\cos 2\pi\left(f_0+f_c\right)t + +\frac{1}{2}\cos 2\pi\left(f_0-f_c\right)t + \\
+ &\ \frac{5}{2}\cos 2\pi\left(2f_0+f_c\right)t + \frac{5}{2}\cos 2\pi\left(2f_0-f_c\right)t
\end{aligned}$$

è immediato scrivere l'espressione dello spettro di ampiezza $S(f)$:

$$
\begin{aligned}
S(f) = {} & 5 \; [\delta\,(f-f_c) + \delta\,(f+f_c)] + \\
& + \; \frac{1}{4}\,[\delta\,(f-f_0-f_c) + \delta\,(f+f_0+f_c) + \delta\,(f+f_0-f_c) + \delta\,(f-f_0+f_c)] = \\
& + \; \frac{5}{4}\,[\delta\,(f-2f_0-f_c) + \delta\,(f+2f_0+f_c) + \delta\,(f+2f_0-f_c) + \delta\,(f-2f_0+f_c)]
\end{aligned}
$$

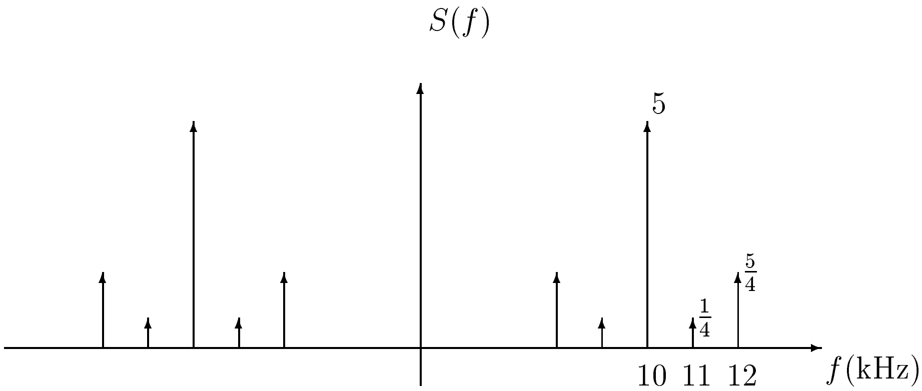


Figura 4.6 Spettro di ampiezza $S(f)$ del segnale modulato $s(t)$.

Per ottenere lo spettro di potenza è sufficiente elevare al quadrato i coefficienti delle varie righe spettrali, dunque:

$$
\begin{aligned}
G(f) = {} & 25 \; [\delta\,(f-f_c) + \delta\,(f+f_c)] + \\
& + \; \frac{1}{16}\,[\delta\,(f-f_0-f_c) + \delta\,(f+f_0+f_c) + \delta\,(f+f_0-f_c) + \delta\,(f-f_0+f_c)] = \\
& + \; \frac{25}{16}\,[\delta\,(f-2f_0-f_c) + \delta\,(f+2f_0+f_c) + \delta\,(f+2f_0-f_c) + \delta\,(f-2f_0+f_c)]
\end{aligned}
$$

Per il grafico si faccia riferimento alla figura precedente. Si consideri ora la scrittura del segnale modulato:

$$s(t) = A\,[1 + x(t)]\cos 2\pi f_0 t$$

L'indice di modulazione m è tale per cui $x(t) = mx'(t)$, dove $x'(t)$ è normalizzato in modo da avere $\min x'(t) = -1$. Ponendo $\cos 2\pi f_0 t = y$ si ha:

$$x(t) = \frac{1}{10}\cos 2\pi f_0 t + \frac{1}{2}\cos 4\pi f_0 t = \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}\left(2y^2 - 1\right)$$

Imponendo l'annullamento della derivata si ottiene il valore di y in corrispondenza del quale $x(t)$ è minimo:

$$\frac{d\,x(t)}{d\,y} = \frac{1}{10} + 2y = 0 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{20}$$

Sostituendo il valore trovato si ha:

$$x_{\min} = -\frac{1}{200} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{200} - 1\right) = -\frac{201}{400}$$

Deve quindi essere:

$$m = \frac{201}{400}$$

per avere min $x'(t) = -1$.

Il calcolo dell'efficienza di modulazione η è immediato, in quanto la potenza totale è la somma di tutti i coefficienti dello spettro di potenza calcolato in precedenza, mentre per la potenza delle bande laterali si considerano solo i coefficienti delle righe laterali rispetto alla frequenza della portante f_c:

$$\eta = \frac{4\cdot\frac{25}{16} + 4\cdot\frac{1}{16}}{4\cdot\frac{25}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} + 2\cdot 25} = \frac{13}{113}$$

Soluzione esercizio 4.19

Nella modulazione di ampiezza si ha sovramodulazione se $1 + mx(t) < 0$, per cui per evitare tale fenomeno si deve imporre che:

$$m \leq -\frac{1}{\min x(t)}$$

Il problema si riconduce quindi al calcolo del minimo del segnale modulante $x(t)$; imponendo l'annullamento della derivata prima rispetto ad $\omega = 2\pi f_0 t$:

$$\frac{d}{d\,\omega}x(t) = -\sin\omega - 4\cos 2\omega = -\sin\omega - 4\left(1 - 2\sin^2\omega\right) = 0$$

ed effettuando la sostituzione $y = \sin\omega$ si ottiene:

$$y + 4\left(1 - 2y^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{1 \pm \sqrt{129}}{16} = \begin{cases} 0.772 \\ -0.647 \end{cases}$$

I valori di ω corrispondenti sono:

$$\omega = \begin{cases} \omega_0 = \arcsin \frac{1+\sqrt{129}}{16} \\ \omega_1 = \pi - \omega_0 \\ \omega_2 = \arcsin \frac{1-\sqrt{129}}{16} \\ \omega_3 = \pi - \omega_2 \end{cases}$$

Sostituendo tali valori nell'espressione di $x(t)$:

$$x(t) = \cos\omega - 2\sin 2\omega$$

si trova:

$$x_{\min} = -2.736 \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{2.736}$$

Il massimo indice di modulazione m per cui non si ha sovramodulazione è: $m = 0.365$.

Soluzione esercizio 4.20

Dato un generico segnale $\mathring{x}(t)$ a banda limitata intorno a f_c, a cui corrisponde il segnale analitico $\mathring{x}(t)$, le componenti in fase ed in quadratura sono esprimibili come:

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \mathrm{Re}\left[\mathring{x}(t)e^{-j2\pi f_c t}\right] \\ x_s(t) &= \mathrm{Im}\left[\mathring{x}(t)e^{-j2\pi f_c t}\right] \end{aligned}$$

Si ricordi inoltre che se $x(t)$ è passa banda e $m(t)$ in banda base, allora il segnale $z(t) = m(t)\,x(t)$ è ancora passa banda e si ha:

$$\mathring{z}(t) = m(t)\mathring{x}(t)$$

Si applichino ora tali risultati ai vari casi di modulazione:

- AM

  Il generico segnale modulato ha espressione:

  $$s(t) = A\left[1 + mx(t)\right]\cos 2\pi f_c t$$

  È evidente che tale segnale può essere visto come il prodotto tra un segnale in banda base $z(t) = A\left[1 + mx(t)\right]$ ed un segnale $c(t) = \cos 2\pi f_c t$ passa banda. Si ha dunque:

  $$s(t) = z(t)c(t) \quad \Rightarrow \quad \mathring{s}(t) = z(t)\mathring{c}(t) = A\left[1 + mx(t)\right]e^{j2\pi f_c t}$$

  A questo punto è immediato il calcolo delle componenti in fase e in quadratura:

  $$s_c(t) \;=\; \mathrm{Re}\left[\mathring{s}(t)e^{-j2\pi f_c t}\right] = A\left[1 + mx(t)\right]$$

$$s_s(t) \;=\; \mathrm{Im}\left[\mathring{s}(t)e^{-j2\pi f_c t}\right] = 0$$

- DSB.
  Il segnale modulato è:
  $$s(t) = Ax(t)\cos 2\pi f_c t$$
  quindi il segnale analitico risulta:
  $$\mathring{s}(t) = Ax(t)e^{j2\pi f_c t}$$
  Le componenti in fase e in quadratura valgono:
  $$s_c(t) \;=\; \mathrm{Re}\left[\mathring{s}(t)e^{-j2\pi f_c t}\right] = Ax(t)$$
  $$s_s(t) \;=\; \mathrm{Im}\left[\mathring{s}(t)e^{-j2\pi f_c t}\right] = 0$$

- USSB e LSSB.
  Si utilizzi la relazione inversa che lega il generico segnale $s(t)$ e le componenti in fase e in quadratura dell'inviluppo complesso:
  $$s(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\right] = s_c(t)\cos 2\pi f_c t - s_s(t)\sin 2\pi f_c t$$
  Confrontando tale espressione con quella del segnale modulato LSSB e USSB[1]:
  $$s(t) = A\left[x(t)\cos 2\pi f_c t \pm \hat{x}(t)\sin 2\pi f_c t\right]$$
  è evidente che:
  $$\text{USSB} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_c(t) = Ax(t) \\ s_s(t) = A\hat{x}(t) \end{cases}$$
  $$\text{LSSB} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_c(t) = Ax(t) \\ s_s(t) = -A\hat{x}(t) \end{cases}$$
  Si noti che tali considerazioni possono esssere applicate anche ai casi precedenti; si è però preferito fornire diversi metodi d'analisi.

- PM e FM.
  Si consideri il segnale modulato:
  $$s(t) = A\cos\left[2\pi f_c t + \Delta\Phi(t)\right]$$

[1] La notazione seguente con il $\pm$ indica che nella modulazione USSB si deve considerare la relazione con segno meno, mentre nella modulazione LSSB si deve utilizzare il segno più.

dove $\Delta\Phi(t)$ vale:

$$\Delta\Phi(t) = \begin{cases} x(t)\Delta\Phi_{\max} & \text{per modulazione PM} \\ 2\pi\Delta f_{\max} \int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau & \text{per modulazione FM} \end{cases}$$

L'inviluppo complesso $\tilde{s}(t)$ del segnale modulato è:

$$\tilde{s}(t) = Ae^{j\,\Delta\Phi(t)}$$

quindi si ha:

$$\begin{aligned} s_c(t) &= \mathrm{Re}\left[\tilde{s}(t)\right] = A\cos\Delta\Phi(t) \\ s_s(t) &= \mathrm{Im}\left[\tilde{s}(t)\right] = A\sin\Delta\Phi(t) \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 4.21

Si consideri il filtro:

$$H(f) = \begin{cases} (|f| - f_c + W/2)/W & \text{for } f_c - W/2 \le |f| \le f_c + W/2 \\ 1 & \text{for } f_c + W/2 < |f| \le f_c + W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

avente la seguente rappresentazione grafica:

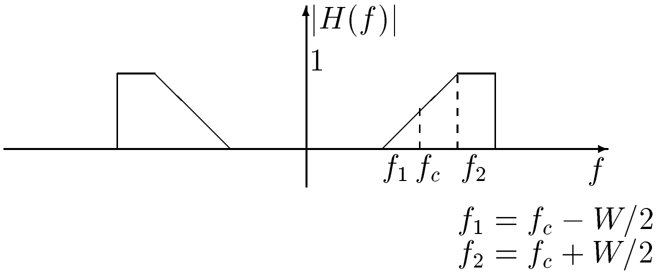


Figura 4.7 Modulo di $H(f)$

Per poter ricostruire il segnale $x(t)$ senza distorsioni è necessario che il filtro equivalente in banda base sia costante nell'intervallo di frequenze pari alla banda del segnale, cioè:

$$H(f-f_c) + H(f+f_c) = k$$

Analizzando l'espressione del filtro è facile verificare che tale proprietà è rispettata (si trova infatti $H(f-f_c) + H(f+f_c) = 1$), per cui si può concludere che il segnale $x(t)$ è ricostruito senza distorsioni.

Si consideri il canale equivalente in banda base; l'inviluppo complesso del segnale modulato risulta:

$$\tilde{s}(t) = Ax(t) * \frac{1}{2}\tilde{h}(t)$$

dove $\tilde{h}(t)/2$ indica la funzione di trasferimento del filtro vestigiale. Si ha:

$$\tilde{H}(f) \;=\; 2u(f+f_c)H(f+f_c) = 2\begin{cases} \frac{1}{W}\left(f+\frac{W}{2}\right) & |f| \le \frac{W}{2} \\ 1 & \frac{W}{2} \le f \le W \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$\tilde{h}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(f)e^{j2\pi ft}\,df = 2\int_{-W/2}^{W/2}\left(\frac{f}{W}+\frac{1}{2}\right)e^{j2\pi ft}\,df + 2\int_{W/2}^{W} e^{j2\pi ft}\,df$$

Svolgendo per parti il primo integrale si ottiene:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(t) \;&=\; \frac{2}{W}\left\{\left[\frac{1}{j2\pi t}fe^{j2\pi ft}\right]_{-W/2}^{W/2} - \int_{-W/2}^{W/2}\frac{1}{j2\pi t}e^{j2\pi ft}\,df\right\} + \frac{1}{j2\pi t}\left[e^{j2\pi ft}\right]_{-W/2}^{W/2} + \\
&\frac{1}{j\pi t}\left[e^{j2\pi ft}\right]_{W/2}^{W} = \frac{1}{j2\pi t}\left(e^{j\pi Wt}+e^{j\pi Wt}\right) + \frac{2}{W}\left[\frac{1}{4\pi^2t^2}e^{j2\pi ft}\right]_{-W/2}^{W/2} + \\
&\frac{1}{j2\pi t}\left(e^{j\pi Wt}-e^{j\pi Wt}\right) + \frac{2}{j2\pi t}e^{j\pi Wt}\left(e^{j\pi Wt}-1\right) = \\
&= \frac{2}{2\pi^2Wt^2}\left(e^{j\pi Wt}-e^{-j\pi Wt}\right) + \frac{1}{j\pi t}e^{j2\pi Wt} = j\frac{\sin\pi Wt}{\pi^2Wt^2} - j\frac{1}{\pi t}e^{j2\pi Wt} = \\
&= \frac{j}{\pi t}\left[\operatorname{sinc}(Wt) - e^{j2\pi Wt}\right]
\end{aligned}$$

L'inviluppo complesso del segnale modulato diviene:

$$\tilde{s}(t) = x(t) * \frac{1}{2}\tilde{h}(t) = x(t) * \frac{j}{2\pi t}\operatorname{sinc}(Wt) - x(t) * \frac{j}{2\pi t}e^{j2\pi Wt}$$

Poiché la trasformata di Fourier di

$$\frac{j}{\pi t}e^{j2\pi Wt}$$

è:

$$\operatorname{sgn}(f-W)$$

si trova:

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) + jx(t) * \frac{\mathrm{sinc}(Wt)}{\pi t}\right) = \frac{1}{2}\left(x(t) + j\hat{x}^{'}(t)\right)$$

Analizzando il risultato ottenuto si può notare l'analogia con la modulazione USSB, in cui si ha:

$$\tilde{s}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

Nella modulazione vestigiale in luogo della trasformata di Hilbert $\hat{x}(t)$ si trova una trasformata di Hilbert modificata:

$$\hat{x}^{'}(t) = x(t) * \frac{\mathrm{sinc}(Wt)}{\pi t}$$

Soluzione esercizio 4.22

Si consideri la generica espressione del segnale modulato FM:

$$s(t) = A\cos\left[2\pi f_c t + 2\pi \Delta f_{\max} \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right]$$

La deviazione di frequenza istantanea è:

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\Delta\Phi(t)$$

dove:

$$\Delta\Phi(t) = 2\pi\Delta f_{\max} \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Applicando tali risultati all'esercizio si ottiene:

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\Delta\Phi(t) = \frac{10}{2\pi}x(t)$$

il cui andamento nel tempo è dato in figura.
La deviazione di frequenza di picco vale quindi:

$$\Delta f_{\max} = \frac{10}{2\pi}$$

Soluzione esercizio 4.23

Per progettare un sistema FM che richieda la minima potenza trasmessa è necessario imporre due condizioni:

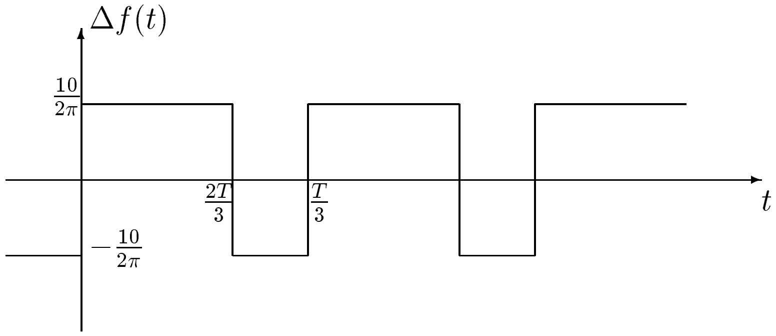


Figura 4.8 Andamento della frequenza istantanea in funzione del tempo

1. condizione sulla banda del canale che consiste nel considerare la banda del segnale modulato
$$W = 2(\beta + 1) B_x$$
minore o al limite uguale alla banda B_c del canale;
2. condizione di soglia:
$$\frac{P_{Rx}}{P_{noise,in}} \geq 10$$

Sostituendo i valori $B_x = 10$ kHz e $B_c = 100$ kHz dalla prima condizione si ottiene:

$$2(\beta + 1) B_x \geq B_c \quad \Rightarrow \beta \leq \frac{B_c}{2B_x} - 1 = 4$$

Si consideri a questo punto il rapporto segnale-rumore all'uscita del demodulatore con modulazione FM:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = 3\beta^2 P_{x'} \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

dove $P_{x'}$ è la potenza normalizzata del segnale modulante, mentre $(S/N)_b$ indica il rapporto segnale-rumore in banda base, definito come:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_{Rx}}{B_x N_0}$$

Se non ci sono attenuazioni si assume che la potenza ricevuta P_{Rx} è uguale a quella trasmessa P_{Tx}, mentre in presenza di attenuazione L si ha:

$$P_{Rx} = \frac{P_{Tx}}{L}$$

La condizione di soglia porta ad avere un rapporto segnale-rumore in banda base pari a:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = 20(\beta + 1)$$

di conseguenza si ha:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = 3\beta^2 P_{x'} \cdot 20(\beta + 1) = 30\beta^2 (\beta + 1)$$

Imponendo un rapporto segnale-rumore al ricevitore di 40 dB si trova:

$$30\beta^2 (\beta + 1) = 10^4 \;\Rightarrow\; \beta \cong 6.6$$

Il sistema che permette di avere la minima potenza trasmessa è dunque quello con $\beta = 4$. Sostituendo tale valore nell'espressione del rapporto segnale-rumore al ricevitore si ottiene:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_O = 3\beta^2 P_{x'} \frac{P_{Rx}}{B_x N_0} = 10^4 \;\Rightarrow\; P_{Tx} = P_{Rx} = \frac{10^4 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 4^2 \cdot 0.5} = \frac{1}{24} = 0.04167 \text{ W}$$

Nel caso in cui il canale attenui il segnale di $L = 10$ dB si ha:

$$P_{Tx} = \frac{P_{Rx}}{L} = \frac{1}{24 \cdot 10} = 0.416 \text{ W}$$

Soluzione esercizio 4.24

Si consideri innanzitutto l'analisi dello spettro di potenza del rumore: se la deviazione di fase $\Delta\Phi(t)$ e la potenza di rumore sono sufficientemente piccole, si può approssimare il rumore di fase come:

$$\Phi_n(t) \cong \frac{n_s(t)}{A}$$

quindi il rumore dopo la demodulazione diventa:

$$z(t) \cong \frac{n_s(t)}{2\pi\Delta f_{\max}} A$$

Lo spettro di rumore è:

$$S_z(f) \cong \frac{N_0}{\Delta f_{\max}^2 A^2} f^2 \qquad f \in [-B_x, B_x]$$

Dalla precedente relazione risulta evidente che lo spettro del rumore ha andamento parabolico, per cui il rumore disturba di più le alte frequenze; per compensare tale fenomeno si utilizza un filtro di *enfasi* che aumenta la potenza del segnale da trasmettere alle alte frequenze, mentre il ricevitore, per non distorcere il segnale, è dotato di un filtro di *deenfasi* che ha funzione complementare. Per quanto detto la funzione di trasferimento di tale filtro sarà di tipo passa basso; più precisamente si ha:

$$H_d(f) = \frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_0}}$$

dove f_0 indica la frequenza di taglio del filtro. La densità spettrale di rumore dopo il filtro di *deenfasi* è:

$$S_\nu(v) = |H(f)|^2 S_z(f) = \frac{f_0^2 N_0}{\Delta f_{\max}^2 A^2} \frac{f^2}{f^2 + f_0^2}$$

La potenza di rumore risulta essere:

$$
\begin{aligned}
P_n &= \int_{-B_x}^{B_x} S_\nu(f)\,df = \frac{2f_0^2 N_0}{\Delta f_{\max}^2 A^2}\left[f - f_0 \arctan\frac{f}{f_0}\right]_0^{B_x} = \\
&= 2\frac{f_0^3 N_0}{\Delta f_{\max}^2 A^2}\left[\frac{B_x}{f_0} - \arctan\frac{B_x}{f_0}\right]
\end{aligned}
$$

Il rapporto segnale-rumore all'uscita del ricevitore è esprimibile come:

$$
\left(\frac{S}{N}\right)_O = \frac{P_{x'}}{P_n} = P_{x'}\frac{\Delta f_{\max}^2 A^2}{2B_x N_0}\,\frac{B_x}{f_0^3\left(\frac{B_x}{f_0} - \arctan\frac{B_x}{f_0}\right)}
$$

Tenendo presente che:

$$
\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{A^2}{2B_x N_0} \qquad \text{e} \qquad \frac{\Delta f_{\max}}{B_x} = \beta
$$

con semplici passaggi si perviene alla forma:

$$
\left(\frac{S}{N}\right)_O = 3\beta^2 P_{x'}\left(\frac{S}{N}\right)_b \frac{B_x^3}{3f_0^3\left(\frac{B_x}{f_0} - \arctan\frac{B_x}{f_0}\right)}
$$

Si noti come rispetto alla modulazione FM senza uso di filtri di *enfasi/deenfasi* si abbia un guadagno pari a:

$$
G = \frac{B_x^3}{3f_0^3\left(\frac{B_x}{f_0} - \arctan\frac{B_x}{f_0}\right)} = 39.08 \;\Rightarrow\; G = 15.92 \text{ dB}
$$

In un sistema DSB, il rapporto segnale-rumore all'uscita del ricevitore vale:

$$
\left(\frac{S}{N}\right)_O = \left(\frac{S}{N}\right)_b
$$

quindi utilizzando il sistema FM con filtri di *enfasi/deenfasi* si ha il guadagno:

$$
G = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{OFM}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{ODSB}} = 3\beta^2 P_{x'}\frac{B_x^3}{3f_0^3\left(\frac{B_x}{f_0} - \arctan\frac{B_x}{f_0}\right)} = 1465.5 \;\Rightarrow\; G = 31.6 \text{ dB}
$$

Soluzione esercizio 4.25

La relazione che fornisce il rapporto segnale-rumore all'uscita del demodulatore FM è:

$$
\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{FM}} = 3\beta^2 P_{x'}\left(\frac{S}{N}\right)_b
$$

dove $(S/N)_b$ è il rapporto segnale-rumore in banda base e $P_{x'}$ è la potenza del segnale normalizzato $x' = x/x_{\max}$.
Utilizzando la regola di Carson e imponendo l'utilizzo di tutta la banda del canale B_c si ottiene:

$$2\,(\beta+1)\,W = B_c \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{B_c}{2W} - 1 = 11.5$$

Sostituendo il valore di β nell'espressione del rapporto segnale-rumore e tenendo presente che $P_{x'} = P_x$ essendo $x_{\max} = 1$ si ottiene:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{FM}} = 3\beta^2 P_{x'} \left(\frac{S}{N}\right)_b = 3 \cdot (11.5)^2 \cdot 0.1 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_b = 39.675 \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

Nel caso della modulazione AM il rapporto segnale-rumore all'uscita del modulatore è legato al rapporto segnale-rumore in banda base dalla relazione:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{AM}} = \eta \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

dove η, detta efficienza di modulazione, vale:

$$\eta = \frac{m^2 P_{x'}}{1 + m^2 P_{x'}} = 0.0674$$

In definitiva si ha:

$$G = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{FM}}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{\mathrm{AM}}} = \frac{3\beta^2 P_x}{\eta} = 588.65 \;\Rightarrow G \cong 27.7 \text{ dB}$$

Capitolo 5

Spettri di potenza di segnali modulati numericamente (soluzioni)

Calcolo dello spettro di potenza di un segnale ciclostazionario

Consideriamo la classe dei segnali ciclostazionari, ovvero che soddisfano le relazioni

$$\begin{cases} \mu(t) & = E[x(t)] & = \mu(t+T) \\ R_x(t+\tau,t) & = E[x(t+\tau)x(t)^*] & = R_x(t+\tau+T,t+T) \end{cases}$$

I segnali modulati numericamente da una sequenza di simboli stazionaria (α_n) rientrano in questa classe. Consideriamo segnali modulati aventi la forma seguente:

$$x(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t-nT;\; \alpha_n,\, \sigma_n)\;,$$

dove $\varphi(t;\alpha_n,\sigma_n)$ è la forma d'onda base la cui trasformata di Fourier è $\Phi(f;\alpha_n,\sigma_n)$. α_n è l'n-esimo simbolo trasmesso dalla sorgente e σ_n è il corrispondente stato del modulatore, qualora esso abbia memoria, determinato dalla sequenza dei simboli precedenti.
Si dimostra che lo spettro di potenza di tali segnali è composto, in generale, di una parte continua e di una parte discreta o a righe:

$$G_x(f) \;=\; G_x^{(c)}(f) \;+\; G_x^{(d)}(f)\;.$$

Queste componenti hanno l'espressione

$$\begin{cases} G_x^{(c)}(f) \;=\; \dfrac{1}{T} \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[G_m(f) - G_\infty(f)\right]\, e^{-j2\pi m f T} \\ G_x^{(d)}(f) \;=\; \dfrac{1}{T^2}\, G_\infty(f) \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \dfrac{m}{T}\right) \end{cases}$$

dove

$$G_m(f) \;=\; E\left[\Phi(f;\ \alpha_{n+m},\, \sigma_{n+m})\ \Phi(f;\ \alpha_n,\, \sigma_n)^*\right]$$

e

$$G_\infty(f) \;=\; \left|E\left[\Phi(f;\ \alpha_n,\, \sigma_n)\right]\right|^2\ .$$

Si noti che $G_m(f)$ non dipende da n a causa della stazionarietà della sequenza modulante e $G_\infty(f)$ è il quadrato del valore assoluto di $\Phi(f;\ \alpha_n,\, \sigma_n)$ poiché il suo valor medio non dipende da n e $\Phi(f;\ \alpha_{n+m},\, \sigma_{n+m})$ è statisticamente indipendente da $\Phi(f;\ \alpha_n,\, \sigma_n)$ per $m \to \infty$.

Nel caso di segnali modulati linearmente si ha

$$\varphi(t;\ \alpha_n,\, \sigma_n) \;=\; \alpha_n \cdot s(t)\ ,$$

e quindi si ottiene

$$G_m(f) \;=\; E[\alpha_{n+m}\alpha_n^*]\ |S(f)|^2 \;=\; [|\mu_\alpha|^2 + \rho_m\sigma_\alpha^2]\ |S(f)|^2$$

e

$$G_\infty(f) \;=\; |\mu_\alpha|^2\ |S(f)|^2\ ,$$

dove $\mu_\alpha = E[\alpha_n]$, $\sigma_\alpha^2 = E[|\alpha_n - \mu_\alpha|^2]$ e ρ_m è il coefficiente di autocorrelazione della sequenza modulante.

Pertanto, lo spettro di potenza è dato dall'espressione seguente:

$$G_x(f) \;=\; \frac{\sigma_\alpha^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m e^{j2\pi mfT}\ |S(f)|^2 \;+\; \frac{|\mu_\alpha|^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |S(m/T)|^2\ \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)\ .$$

Consideriamo infine il caso in cui il segnale considerato sia dato dalla somma di componenti sinusoidali a frequenze fisse con ampiezze e fasi casuali:

$$x(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{j2\pi f_n t}$$

Per calcolare lo spettro di potenza di questo processo casuale si può utilizzare il metodo descritto nel libro di Benedetto, Biglieri e Castellani, "Digital Transmission Theory":

$$\begin{aligned} E[X(f)X(g)^*] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[\mu_m\mu_n^*]\ \delta(f-f_m)\ \delta(g-f_n) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[\mu_m\mu_n^*]\ \delta(f-f_m)\ \delta(f-g+f_n-f_m) \end{aligned}$$

Estraendo il termine fattore di $\delta(f-g)$ si ottiene lo spettro di potenza (discreto) di $x(t)$:

$$G_x(f) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[|\mu_n|^2]\ \delta(f-f_n)\ .$$

Soluzione esercizio 5.1

L'inviluppo complesso del segnale è il seguente:

$$\tilde{x}(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\alpha_n \; s(t-nT) \;-\; j\;\beta_n \; s(t-nT-T/2)\right] \;.$$

Da questa espressione si ottengono i termini $G_m(f)$:

$$G_m(f) \;=\; E\left[\left(\alpha_{n+m} - j\beta_{n+m}\; e^{-j\pi fT}\right)\left(\alpha_n + j\beta_n \; e^{j\pi fT}\right)\right] \;|S(f)|^2 \;,$$

per il cui calcolo occorre distinguere due casi:

1. Per $m = 0$, si ha

$$G_0(f) \;=\; E\left[\alpha_n^2 + \beta_n^2 - 2\alpha_n\beta_n \sin(\pi fT)\right] \;|S(f)|^2 \;.$$

   Occorre calcolare le medie

$$\begin{cases} E[\alpha_n^2] & = 1 \\ E[\beta_n^2] & = 1 \\ E[\alpha_n\beta_n] & = \frac{1}{8}\cdot(+1) + \frac{3}{8}\cdot(-1) + \frac{1}{8}\cdot(-1) + \frac{3}{8}\cdot(+1) \;=\; 0 \end{cases}$$

   da cui si ottiene

$$G_0(f) \;=\; 2\;|S(f)|^2 \;.$$

2. Per $m \neq 0$, si ha

$$G_m(f) \;=\; E\left[\alpha_{n+m} - j\beta_{n+m}\; e^{-j\pi fT}\right]\; E\left[\alpha_n + j\beta_n \; e^{j\pi fT}\right] \;|S(f)|^2 \;.$$

   Occorre calcolare le medie

$$\begin{cases} E[\alpha_n] & = \frac{1}{8}\cdot(+1) + \frac{3}{8}\cdot(-1) + \frac{1}{8}\cdot(+1) + \frac{3}{8}\cdot(-1) \;=\; -\frac{1}{2} \\ E[\beta_n] & = \frac{1}{8}\cdot(+1) + \frac{3}{8}\cdot(+1) + \frac{1}{8}\cdot(-1) + \frac{3}{8}\cdot(-1) \;=\; 0 \end{cases}$$

   da cui si ottiene

$$G_m(f) \;=\; G_\infty(f) \;=\; \frac{1}{4}\;|S(f)|^2$$

   per ogni $m \neq 0$.

Quindi, lo spettro di potenza di $\tilde{x}(t)$ è dato dall'espressione:

$$G_{\tilde{x}}(f) \;=\; \frac{7}{4T}\;|S(f)|^2 \;+\; \frac{1}{4T^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|S\left(\frac{T}{m}\right)\right|^2 \;\delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

e lo spettro di potenza di $x(t)$ si ottiene attraverso la relazione

$$G_x(f) \;=\; \frac{1}{4}\;\left[G_{\tilde{x}}(f-f_0) + G_{\tilde{x}}(-f-f_0)\right] \;.$$

Il calcolo di $|S(f)|^2$ dà i risultati seguenti:

$$|S(f)|^2 = \frac{A^2}{\pi^4 f^4 T^2} \left[10 - 8\cos\left(\frac{\pi f T}{2}\right) - 8\cos(\pi f T) + 8\cos\left(\frac{3\pi f T}{2}\right) - 2\cos(2\pi f T)\right]$$

e

$$\frac{1}{4T^2} \left|S\left(\frac{T}{m}\right)\right|^2 = \begin{cases} 0 & m \text{ pari} \\ \frac{4A^2}{\pi^4 m^4} & m \text{ dispari} \end{cases}$$

Soluzione esercizio 5.2

Per il calcolo dello spettro di potenza di

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{2} \alpha_{n,j}\ s(t - jT/3 - nT)$$

occorre determinare i termini $G_m(f)$:

$$\begin{aligned} G_m(f) = E\Big[&\left(\alpha_{n+m,0} + \alpha_{n+m,1}\ e^{-j2\pi f T/3} + \alpha_{n+m,2}\ e^{-j4\pi f T/3}\right) \\ &\left(\alpha_{n,0} + \alpha_{n,1}\ e^{j2\pi f T/3} + \alpha_{n,2}\ e^{j4\pi f T/3}\right)\Big]\ |S(f)|^2 . \end{aligned}$$

Per le ipotesi fatte sulle variabili casuali $\alpha_{n,i}$, occorre distinguere due casi:

1. Per $m = 0$, si ha (tralasciando il pedice n):

$$\begin{aligned} G_0(f) &= E\left[\left|\alpha_0 + \alpha_1\ e^{j2\pi f T/3} + \alpha_2\ e^{j4\pi f T/3}\right|^2\right]\ |S(f)|^2 \\ &= E\left[\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1(\alpha_0 + \alpha_2)\cos(2\pi f T/3) + 2\alpha_0\alpha_2\cos(4\pi f T/3)\right] \\ &\cdot |S(f)|^2 \end{aligned}$$

2. Analogamente, per $m \neq 0$, si ha

$$G_m(f) = \left|E\left[\alpha_0 + \alpha_1\ e^{j2\pi f T/3} + \alpha_2\ e^{j4\pi f T/3}\right]\right|^2\ |S(f)|^2 .$$

Pertanto, occorre calcolare le medie presenti nelle espressioni delle componenti $G_m(f)$ dello spettro.

1. Nel primo caso, tutte le terne possibili sono equiprobabili, per cui si ha

$$\text{Prob}\{\alpha_0 = \pm 1,\ \alpha_1 = \pm 1,\ \alpha_2 = \pm 1\} = \frac{1}{8} .$$

   Di conseguenza

$$E[\alpha_0] = E[\alpha_1] = E[\alpha_2] = 0\ , E[\alpha_0^2] = E[\alpha_1^2] = E[\alpha_2^2] = 1$$

   e

$$E[\alpha_0\alpha_1] = E[\alpha_0\alpha_2] = E[\alpha_1\alpha_2] = 0 .$$

Sostituendo nelle espressioni trovate si ottiene

$$G_0(f) \;=\; 3\,|S(f)|^2 \qquad\qquad G_m(f) \;=\; 0 \qquad \forall m \neq 0\ ,$$

da cui si trova lo spettro di potenza di $x(t)$:

$$G_x(f) \;=\; \frac{3}{T}\,|S(f)|^2\ .$$

2. Nel secondo caso, le sole terne con esattamente due $+1$ sono possibili ed equiprobabili, per cui si ha

$$\begin{aligned}\text{Prob}\,\{\alpha_0=+1,\,\alpha_1=+1,\,\alpha_2=-1\} &= \text{Prob}\,\{\alpha_0=+1,\,\alpha_1=-1,\,\alpha_2=+1\}\\ &= \text{Prob}\,\{\alpha_0=-1,\,\alpha_1=+1,\,\alpha_2=+1\}\\ &= \tfrac{1}{3}\ .\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$E[\alpha_0] \;=\; E[\alpha_1] \;=\; E[\alpha_2] \;=\; \frac{1}{3}\,[+1+1-1] \;=\; \frac{1}{3}$$

e

$$E[\alpha_0\alpha_1] \;=\; E[\alpha_0\alpha_2] \;=\; E[\alpha_1\alpha_2] \;=\; \frac{1}{3}\,[+1-1-1] \;=\; -\frac{1}{3}$$

Quindi si ottiene

$$G_0(f) \;=\; \left[3-\frac{4}{3}\cos\frac{2\pi fT}{3}-\frac{2}{3}\cos\frac{4\pi fT}{3}\right]\,|S(f)|^2$$

e

$$G_m(f) \;=\; \frac{1}{9}\,\left[3+4\cos\frac{2\pi fT}{3}+2\cos\frac{4\pi fT}{3}\right]\,|S(f)|^2 \qquad \forall m\neq 0\ ,$$

da cui si trova lo spettro di potenza di $x(t)$:

$$\begin{aligned}G_x(f) \;=\;& \left[\frac{8}{3}-\frac{16}{9}\cos\frac{2\pi fT}{3}-\frac{8}{9}\cos\frac{4\pi fT}{3}\right]\,\frac{|S(f)|^2}{T}\\ &+\frac{1}{T^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|S\left(\frac{3m}{T}\right)\right|^2\,\delta\left(f-\frac{3m}{T}\right)\ .\end{aligned}$$

Si osservi che nella parte discreta dello spettro sono presenti soltanto le righe a frequenze multiple di $3/T$, indipendentemente da $S(f)$, come è lecito aspettarsi in quanto il periodo di segnalazione effettivo è $T/3$.

Soluzione esercizio 5.3

Lo spettro di potenza di $\tilde{x}(t)$ può essere calcolato utilizzando la formula

$$G_{\tilde{x}}(f) \;=\; \frac{\sigma_\alpha^2}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\rho_m e^{j2\pi mfT}\,|S(f)|^2 \;+\; \frac{|\mu_\alpha|^2}{T^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|S(m/T)|^2\,\delta\left(f-\frac{m}{T}\right)\ .$$

Occorre distinguere i due casi dell'esercizio.

1. Nel primo caso le α_n sono incorrelate, per cui $\rho_m = 0 \ \forall \ m \neq 0$. Inoltre

$$\mu_\alpha \;=\; E[\alpha_n] \;=\; \frac{2}{M} \sum_{k=0}^{M/2-1} e^{j(\Phi+2\pi k/M)} \;=\; \frac{2}{M} e^{j\Phi} \cdot \frac{1-e^{j\pi}}{1-e^{j2\pi/M}} \;=\; \frac{2j \ e^{j(\Phi-\pi/M)}}{M \sin(\pi/M)}$$

e

$$\sigma_\alpha^2 \;=\; E[|\alpha_n|^2] - |\mu_\alpha|^2 \;=\; 1 - \frac{4}{M^2 \ \sin^2(\pi/M)} \ .$$

Quindi, lo spettro di potenza vale, in questo caso:

$$G_{\tilde{x}}(f) \;=\; \frac{\sigma_\alpha^2}{T} \ |S(f)|^2 \;+\; \frac{|\mu_\alpha|^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |S(m/T)|^2 \ \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \ .$$

2. Nel secondo caso, occorre considerare al posto delle α_n le β_n definite nel modo seguente:

$$\beta_n \;=\; e^{j\Phi'} \ \alpha_n \ \alpha_{n-1}^* \ .$$

Dalla definizione si ottiene

$$\mu_\beta \;=\; e^{j\Phi'} \ E[\alpha_n \ \alpha_{n-1}^*] \;=\; e^{j\Phi'} \ |\mu_\alpha|^2$$

e

$$\sigma_\beta^2 \;=\; E[|\beta_n|^2] \;-\; |\mu_\beta|^2 \;=\; 1 \;-\; |\mu_\alpha|^4 \ .$$

Il calcolo dei coefficienti di autocorrelazione richiede di considerare diversi casi. Per $m = 1$ si ha

$$E[\beta_{n+1}\beta_n^*] \;=\; E[\alpha_{n+1}\alpha_n^*\alpha_n^*\alpha_{n-1}] \;=\; \mu_\alpha^2 \cdot E[\alpha^2]^* \;=\; 0 \ ,$$

poiché

$$E[\alpha_n^2] \;=\; \frac{2}{M} \sum_{k=0}^{M/2-1} e^{j2(\Phi+2\pi k/M)} \;=\; \frac{2}{M} \ e^{j2\Phi} \cdot \frac{1-e^{j2\pi}}{1-e^{j2\pi/M}} \;=\; 0 \ .$$

Quindi si ottiene

$$\rho_1 \;=\; \frac{0 \;-\; |\mu_\beta|^2}{\sigma_\beta^2} \;=\; -\frac{|\mu_\alpha|^4}{1-|\mu_\alpha|^4} \ .$$

Analogamente, per $m = -1$, si ha

$$E[\beta_{n-1}\beta_n^*] \;=\; E[\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}^*\alpha_n^*\alpha_{n-1}] \;=\; (\mu_\alpha^*)^2 \cdot E[\alpha^2] \;=\; 0 \ ,$$

da cui

$$\rho_{-1} \;=\; \rho_1 \;=\; -\frac{|\mu_\alpha|^4}{1-|\mu_\alpha|^4} \ .$$

Per $m \neq 0, \pm 1$ β_{n+m} e β_n non hanno α_{n+p} con lo stesso indice in comune e quindi sono statisticamente indipendenti, per cui $\rho_m = 0$.
Mettendo insieme i risultati ottenuti si ottiene lo spettro di potenza cercato:

$$\begin{aligned}
G_{\tilde{x}}(f) \; &= \; \frac{1-|\mu_\alpha|^4}{T}\left[1-\frac{2|\mu_\alpha|^4}{1-|\mu_\alpha|^4}\;\cos\;(2\pi fT)\right]\;|S(f)|^2 \\
&+ \; \frac{|\mu_\alpha|^4}{T^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\;\left|S\left(\frac{m}{T}\right)\right|^2\delta\left(f-\frac{m}{T}\right)
\end{aligned}$$

Capitolo 6

Modulazioni numeriche (soluzioni)

Soluzione esercizio 6.1

E' facile verificare che i segnali:

$$\begin{cases} \psi_1(t) & = p(t) \\ \psi_2(t) & = p(t-1) \\ \psi_3(t) & = p(t-2) \end{cases} \qquad [p(t) = u(t) - u(t-T)]$$

sono ortonormali, ed è possibile esprimere i segnali $s_i(t)$ in funzione degli $\psi_j(t)$ nel modo seguente:

$$\begin{cases} s_0(t) & = & 0 & & \\ s_1(t) & = & \psi_1(t) & & \\ s_2(t) & = & & \psi_2(t) & \\ s_3(t) & = & \psi_1(t) & +\psi_2(t) & \\ s_4(t) & = & & & +\psi_3(t) \\ s_5(t) & = & \psi_1(t) & & +\psi_3(t) \\ s_6(t) & = & & +\psi_2(t) & +\psi_3(t) \\ s_7(t) & = & \psi_1(t) & +\psi_2(t) & +\psi_3(t) \end{cases}$$

ovvero è possibile rappresentare i segnali in uno spazio a 3 dimensioni caratterizzato dai versori $\psi_j(t)$. In questo spazio è possibile rappresentare i segnali $s_i(t)$ attraverso i punti:

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}_0 & = (0{,}0{,}0) \\ \boldsymbol{s}_1 & = (1{,}0{,}0) \\ \boldsymbol{s}_2 & = (0{,}1{,}0) \\ \boldsymbol{s}_3 & = (1{,}1{,}0) \\ \boldsymbol{s}_4 & = (0{,}0{,}1) \\ \boldsymbol{s}_5 & = (1{,}0{,}1) \\ \boldsymbol{s}_6 & = (0{,}1{,}1) \\ \boldsymbol{s}_7 & = (1{,}1{,}1) \end{cases}$$

che sono le coordinate dei vertici di un cubo di lato unitario. La probabilità di corretta ricezione condizionata a uno qualsiasi degli 8 segnali è:

$$P(c|s_i) \;=\; \text{Prob}\left\{\nu_1 < \frac{1}{2},\, \nu_2 < \frac{1}{2},\, \nu_3 < \frac{1}{2}\right\} \;=\; (1-p)^3 \quad ,$$

dove

$$p \;=\; \frac{1}{2}\,\text{Erfc}\frac{1}{2\sqrt{N_0}} \quad .$$

Quindi, la probabilità di errore vale

$$P(e) \;=\; 1-(1-p)^3 \cong 3p \quad .$$

Questo canale è equivalente al parallelo di tre canali binari simmetrici con probabilità di errore sul bit p, indipendenti tra loro.

Soluzione esercizio 6.2

E' evidente che si può scrivere:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \cos\left[2\pi f_0 t + \frac{\pi}{M}(2i-1)\right] \\ &= \cos\left[\frac{\pi}{M}(2i-1)\right]\cos(2\pi f_0 t) - \sin\left[\frac{\pi}{M}(2i-1)\right]\sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

per $t \in (0,T)$. L'ipotesi $f_0 T \gg 1$ consente di considerare i segnali $\cos(2\pi f_0 t)$ e $\sin(2\pi f_0 t)$ approssimativamente ortogonali, poiché

$$\int_0^T \cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t)\; dt \;=\; \frac{1}{8\pi f_0}[1-\cos(4\pi f_0 T)]$$

mentre

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t)\; dt \;&=\; \frac{T}{2} + \frac{1}{8\pi f_0}\sin(4\pi f_0 T) \\ \int_0^T \sin^2(2\pi f_0 t)\; dt \;&=\; \frac{T}{2} - \frac{1}{8\pi f_0}\sin(4\pi f_0 T) \quad . \end{aligned}$$

Quindi è possibile trascurare i termini con fattore $1/8\pi f_0$ e considerare i due segnali ortogonali per cui lo spazio dei segnali $x_i(t)$ ha due dimensioni. Si osservi che, se $f_0 = \frac{n}{2T}$, allora i segnali sono *esattamente* ortogonali.

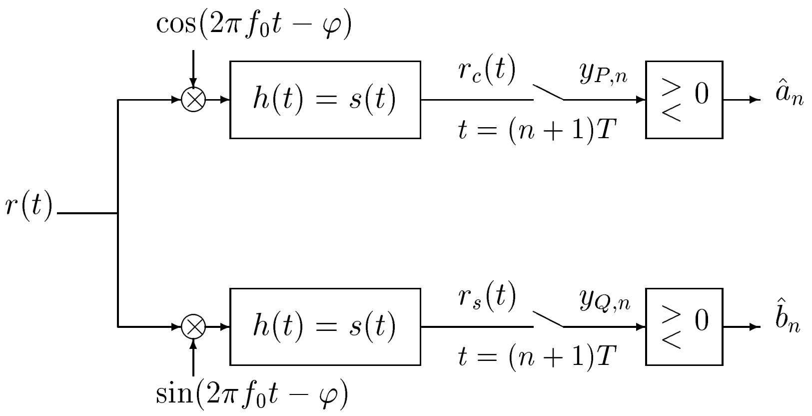
La rappresentazione dei segnali sul piano corrisponde ai vertici di un poligono regolare a M lati inscritto nel cerchio di raggio unitario.

La rotazione dei segnali $x_i(t)$ di una fase fissa φ corrisponde alla rotazione dei punti nello spazio dei segnali della stessa fase poiché:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \cos\left[2\pi f_0 t + \frac{\pi}{M}(2i-1) + \varphi\right] \\ &= \cos\left[\frac{\pi}{M}(2i-1) + \varphi\right]\cos(2\pi f_0 t) - \sin\left[\frac{\pi}{M}(2i-1) + \varphi\right]\sin(2\pi f_0 t) \ . \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 6.3

La figura rappresenta lo schema a blocchi di un ricevitore coerente in cui la portante recuperata è affetta da un errore di fase statico φ.



Il segnale trasmesso (QPSK)

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n s(t-nT)\cos(2\pi f_0 t) + b_n s(t-nT)\sin(2\pi f_0 t)]$$

è caratterizzato dai parametri:

$$\begin{cases} f_0 & \text{frequenza della portante} \gg \frac{1}{T} \\ T & \text{periodo dei dati.} \end{cases}$$

I livelli trasmessi, a_n e b_n, possono valere ± 1 con probabilità $\frac{1}{2}$ e sono scorrelati tra loro e $s(t) = u(t) - u(t-T)$. Il segnale ricevuto è:

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n s(t-nT)\cos(2\pi f_0 t) + b_n s(t-nT)\sin(2\pi f_0 t)] + n(t) \quad .$$

I segnali all'uscita dei filtri di ricezione sono dati dalle espressioni:

$$\begin{aligned} r_c(t) &= [r(t)\cos(2\pi f_0 t - \varphi)] * s(t) \\ &= \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{[a_n \cos(2\pi f_0 t) + b_n \sin(2\pi f_0 t)] s(t-nT) + n(t)\} \cos(2\pi f_0 t - \varphi) \right\} * s(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} [a_n \cos(2\pi f_0 \theta) + b_n \sin(2\pi f_0 \theta)]\ \cos(2\pi f_0 \theta - \varphi)\ s(t-\theta)\ d\theta \\ &\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} n(\theta)\ \cos(2\pi f_0 \theta - \varphi)\ s(t-\theta)\ d\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_s(t) &= [r(t)\sin(2\pi f_0 t-\varphi)] * s(t)\\
&= \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{[a_n\cos(2\pi f_0 t)+b_n\sin(2\pi f_0 t)]s(t-nT)+n(t)\}\sin(2\pi f_0 t-\varphi)\right\} * s(t)\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T}[a_n\cos(2\pi f_0\theta)+b_n\sin(2\pi f_0\theta)]\ \cos(2\pi f_0\theta-\varphi)\ s(t-\theta)\ d\theta\\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} n(\theta)\ \sin(2\pi f_0\theta-\varphi)\ s(t-\theta)\ d\theta
\end{aligned}
$$

Quindi i campioni su cui sono prese le decisioni sono:

$$
\begin{aligned}
y_{P,n} &= r_c((n+1)T)\\
&= \int_{nT}^{(n+1)T}[a_n\cos(2\pi f_0\theta)+b_n\sin(2\pi f_0\theta)]\ \cos(2\pi f_0\theta-\varphi)\ d\theta\\
&+ \int_{nT}^{(n+1)T} n(\theta)\ \cos(2\pi f_0\theta-\varphi)\ d\theta\\
&= \frac{T}{2}\left\{\cos\varphi\ +\ \frac{1}{2\pi f_0 T}\cos[2\pi(2n+1)f_0T]\sin(2\pi f_0 T)\right\}a_n\\
&+ \frac{T}{2}\left\{\sin\varphi\ +\ \frac{1}{2\pi f_0 T}\sin[2\pi(2n+1)f_0T]\sin(2\pi f_0 T)\right\}b_n\ +\ \nu_{P,n}\\
&\cong \frac{T}{2}\{a_n\cos\varphi+b_n\sin\varphi\}\ +\ \nu_{P,n}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
y_{Q,n} &= r_s((n+1)T)\\
&= \int_{nT}^{(n+1)T}[a_n\cos(2\pi f_0\theta)+b_n\sin(2\pi f_0\theta)]\ \sin(2\pi f_0\theta-\varphi)\ d\theta\\
&+ \int_{nT}^{(n+1)T} n(\theta)\ \sin(2\pi f_0\theta-\varphi)\ d\theta\\
&= -\frac{T}{2}\left\{\sin\varphi\ -\ \frac{1}{2\pi f_0 T}\cos[2\pi(2n+1)f_0T]\sin(2\pi f_0 T)\right\}a_n\\
&+ \frac{T}{2}\left\{\cos\varphi\ -\ \frac{1}{2\pi f_0 T}\sin[2\pi(2n+1)f_0T]\sin(2\pi f_0 T)\right\}b_n\ +\ \nu_{Q,n}\\
&\cong \frac{T}{2}\{-a_n\sin\varphi+b_n\cos\varphi\}\ +\ \nu_{Q,n}
\end{aligned}
$$

dove l'ultima approssimazione vale poiché $f_0 \gg 1/T$ ed è una uguaglianza se f_0 è un multiplo intero di $1/T$. Le componenti di rumore

$$
\begin{cases}
\nu_{P,n} = \displaystyle\int_{nT}^{(n+1)T} n(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t-\varphi)dt\\
\nu_{Q,n} = \displaystyle\int_{nT}^{(n+1)T} n(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t-\varphi)dt
\end{cases}
$$

hanno valor medio nullo in quanto combinazioni lineari di un processo casuale a valor medio nullo. Per calcolare la varianza, posto

$$\nu \;=\; \int_I n(t)f(t)dt \quad ,$$

si ha:

$$\begin{aligned} E[\nu^2] &= \int_I \int_I E[n(t_1)n(t_2)]\; f(t_1)f(t_2)\; dt_1 dt_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \int_I \int_I \delta(t_1 - t_2)\; f(t_1)f(t_2)\; dt_1 dt_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \int_I \; f^2(t)dt \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{cases} E[\nu_{P,n}^2] \;\cong\; \dfrac{N_0 T}{4} \\ E[\nu_{Q,n}^2] \;\cong\; \dfrac{N_0 T}{4} \end{cases}$$

con la solita approssimazione.
Essendo i simboli trasmessi equiprobabili, si ha:

$$\begin{aligned} P(e) &= \text{Prob}\left\{\hat{a}_n = +1 | a_n = -1\right\} \\ &= \text{Prob}\left\{-\cos\varphi + b_n \sin\varphi + \frac{2\nu}{T} > 0\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\text{Erfc}\left[\frac{\cos(\varphi - \pi/4)}{\sqrt{N_0/T}}\right] + \text{Erfc}\left[\frac{\cos(\varphi + \pi/4)}{\sqrt{N_0/T}}\right]\right\} \quad . \end{aligned}$$

Si verifichi che lo stesso valore è assunto dalle altre probabilità di errore condizionate sui bit trasmessi.

Soluzione esercizio 6.4

La potenza media dei segnali

$$s_i(t) \;=\; \sqrt{\frac{2}{T}}\; [a_i \cos(2\pi f_0 t) - b_i \sin(2\pi f_0 t)] \;, \qquad\qquad i = 1, \ldots, M$$

si ottiene facendo la solita approssimazione per $f_0 \gg 1/T$:

$$P_i \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T [s_i(t)]^2 dt \;=\; \frac{1}{T}[a_i^2 + b_i^2] \quad .$$

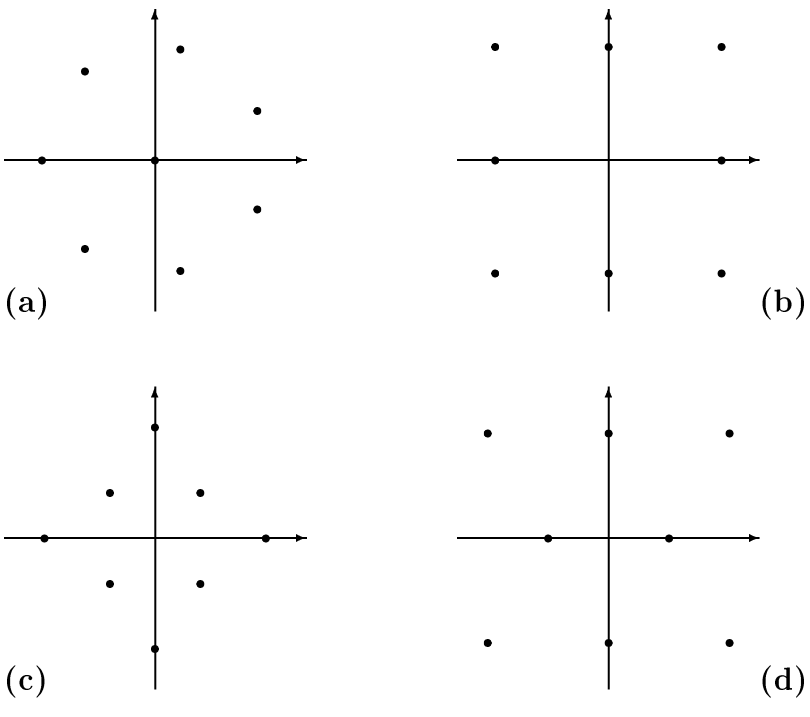
da cui, mediando su i:

$$\mathcal{P} \;=\; \frac{1}{MT}\; \sum_{i=1}^{M} (a_i^2 + b_i^2) \quad .$$

Assumendo i segnali trasmessi equiprobabili, la probabilità di errore può essere maggiorata nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
P(e) &\leq \sum_{i=1}^{M} \mathrm{Prob}\{s_i \text{ trasmesso, } s_j \text{ ricevuto}\} \\
&= \sum_{i=1}^{M} \mathrm{Prob}\{s_i\} \sum_{j=1,\ j\neq i}^{M} \mathrm{Prob}\{s_j|s_i\} \\
&= \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1,\ j\neq i}^{M} \mathrm{Erfc}\frac{d_{ij}}{2\sqrt{N_0}} \\
&= \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1,\ j\neq i}^{M} \mathrm{Erfc}\left[\sqrt{\frac{\mathcal{P}T}{N_0}}\ \frac{d_{ij}}{2\sqrt{\frac{1}{M}\sum_k (a_k^2+b_k^2)}}\right]
\end{aligned}
$$

Soluzione esercizio 6.5



La probabilità di errore per una costellazione generica composta da M segnali con distanza minima $d_{\min}$ è limitata superiormente dallo *union bound*:

$$P(e) \;\leq\; \frac{M-1}{2}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}}\right) \quad .$$

Consideriamo le costellazioni proposte:

a) L'energia media e la distanza minima sono:

$$\begin{cases} \mathcal{E} & = \frac{1}{8}\,[7 \cdot r^2 + 1 \cdot 0] \;=\; \frac{7}{8} r^2 \\ d_{\min} & = 2r \cdot \sin\frac{\pi}{7} \\ \frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}} & = \sqrt{\frac{8}{7}} \sin\frac{\pi}{7}\,\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{N_0}} \;=\; \sqrt{\frac{24}{7}} \sin\frac{\pi}{7}\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \end{cases}$$

da cui

$$P(e) \;\leq\; \frac{7}{2}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{24}{7}} \sin\frac{\pi}{7}\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \;=\; 3.5\,\mathrm{Erfc}\left(0.8034\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

b) L'energia media e la distanza minima sono:

$$\begin{cases} \mathcal{E} & = \frac{1}{8}\,[4 \cdot d^2 + 4 \cdot 2d^2] \;=\; \frac{3}{2} d^2 \\ d_{\min} & = d \\ \frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}} & = \sqrt{\frac{1}{6}}\,\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{N_0}} \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}}\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \end{cases}$$

da cui

$$P(e) \;\leq\; \frac{7}{2}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \;=\; 3.5\,\mathrm{Erfc}\left(0.7071\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

c) L'energia media e la distanza minima sono:

$$\begin{cases} \mathcal{E} & = \frac{1}{8}\,[4 \cdot \frac{d^2}{2} + 4 \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)^2\; d^2}{4}] \;=\; \frac{3+\sqrt{3}}{4} d^2 \\ d_{\min} & = d \\ \frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}} & = \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}\,\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{N_0}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}/3}}\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \end{cases}$$

da cui

$$P(e) \;\leq\; \frac{7}{2}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}/3}}\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \;=\; 3.5\,\mathrm{Erfc}\left(0.796\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

d) L'energia media e la distanza minima sono:

$$\begin{cases} \mathcal{E} & = \frac{1}{8}\,[2 \cdot \frac{d^2}{4} + 2 \cdot \frac{3d^2}{4} + 4 \cdot \frac{7d^2}{4}] \;=\; \frac{9}{8} d^2 \\ d_{\min} & = d \\ \frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}} & = \sqrt{\frac{2}{9}}\,\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{N_0}} \;=\; \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \end{cases}$$

da cui

$$P(e) \;\leq\; \frac{7}{2}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \;=\; 3.5\,\mathrm{Erfc}\left(0.8165\,\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Un utile confronto delle prestazioni offerte dalle varie costellazioni si ottiene considerando il rapporto, in dB, dei coefficienti nei vari argomenti della Erfc(.). Tale rapporto è detto guadagno di energia per bit tra le costellazioni in quanto rappresenta la riduzione di energia che consente di ottenere la stessa probabilità di errore (asintotica). La tabella riporta il guadagno della costellazione in colonna rispetto alla costellazione in riga:

	(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**
(a)	0dB	-1.11dB	-0.08dB	0.14dB
(b)	1.11dB	0dB	-1.03dB	1.25dB
(c)	-0.08dB	-1.03dB	0dB	0.22dB
(d)	-0.14dB	-1.25dB	-0.22dB	0dB

Da questi dati è evidente che la costellazione **(d)** è la più efficiente poiché guadagna rispetto a tutte le altre costellazioni.

Soluzione esercizio 6.6

1. Dalla definizione

$$\boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j \;=\; \begin{cases} \mathcal{E} & i \;=\; j \\ \rho\mathcal{E} & i \;\neq\; j \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{s}_i\right|^2 &= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j \\ &= \sum_{i} |\boldsymbol{s}_i|^2 \;+\; \sum_{i\,\neq\,j} \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j \\ &= M\;\mathcal{E} + M(M-1)\;\rho\mathcal{E} \\ &= M\;\mathcal{E}\;[1 \;+\; (M-1)\rho] \;>\; 0 \end{aligned}$$

per cui

$$\rho \;>\; -\frac{1}{M-1} \quad .$$

La seconda disuguaglianza, $\rho \leq 1$, deriva dalla disuguaglianza di Schwartz.

2. Utilizzando il risultato del punto precedente si ha:

$$\mathcal{E}'_{\min} \;=\; \mathcal{E} - \frac{1}{M^2}\,\left|\sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{s}_i\right|^2 \;=\; \mathcal{E}\left\{1 \;-\; \frac{1 \;+\; (M-1)\rho}{M}\right\} \;=\; \mathcal{E}\,\left(1 \;-\; \frac{1}{M}\right)\,(1 \;-\; \rho)$$

3. La distanza tra i segnali $\boldsymbol{s}_i$ e $\boldsymbol{s}_j$ dei due sistemi è, rispettivamente:

$$d_{ij}^2 = |\boldsymbol{s}_i|^2 - 2\boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j + |\boldsymbol{s}_j|^2 = \begin{cases} 2\mathcal{E} & \text{segnali ortogonali} \\ 2\mathcal{E}\ (1-\rho) & \text{segnali non ortogonali} \end{cases}$$

da cui il sistema ortogonale con energia ridotta del fattore $(1-\rho)$ ha la stessa distanza minima e probabilità di errore asintotica del sistema non ortogonale.

Soluzione esercizio 6.7

L'esercizio mette a confronto la capacità di un canale a banda limitata con potenza massima di segnale e densità di rumore fissate calcolata in due modi distinti:

1. attraverso la formula di Shannon per il canale a banda limitata;
2. attraverso la capacità del canale binario equivalente.

1. Dai dati del problema si può calcolare la capacità del canale AWGN:

$$\begin{aligned} C &= W\ \log_2\left[1+\frac{P}{N_0\ W}\right] = 3000\ \text{Hz}\ \cdot \log_2\left[1+\frac{10^{-6}\ \text{W}}{2\cdot 10^{-10}\ \text{W/ Hz}\cdot 3000\ \text{Hz}}\right] \\ &\cong 4245\ \text{bit/s}. \end{aligned}$$

2. Poiché la banda minima del segnale modulato vale, rispettivamente:

$$W = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & = R_b & \text{2-PSK} \\ \dfrac{2}{2T} & = R_b & \text{2-FSK} \\ \dfrac{1}{T} & = \dfrac{R_b}{2} & \text{4-PSK} \end{cases}$$

si otiene la velocità massima di trasmissione (in bit/s):

$$R_b = \begin{cases} W & = 3000\ \text{bit/s} & \text{2-PSK} \\ W & = 3000\ \text{bit/s} & \text{2-FSK} \\ 2W & = 6000\ \text{bit/s} & \text{4-PSK} \end{cases}$$

3. La probabilità di errore sul bit vale, rispettivamente:

$$P_b(e) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ \text{Erfc}\left(\sqrt{\dfrac{\mathcal{E}}{N_0}}\right) & = \dfrac{1}{2}\ \text{Erfc}\left(\sqrt{\dfrac{P}{WN_0}}\right) & = 0.034 & \text{2-PSK} \\ \dfrac{1}{2}\ \text{Erfc}\left(\sqrt{\dfrac{\mathcal{E}}{2N_0}}\right) & = \dfrac{1}{2}\ \text{Erfc}\left(\sqrt{\dfrac{P}{2WN_0}}\right) & = 0.098 & \text{2-FSK} \\ \dfrac{1}{2}\ \text{Erfc}\left(\sqrt{\dfrac{\mathcal{E}}{2N_0}}\right) & = \dfrac{1}{2}\ \text{Erfc}\left(\sqrt{\dfrac{P}{2WN_0}}\right) & = 0.098 & \text{4-PSK} \end{cases}$$

dove si è supposto che i bit siano codificati alla Gray nel 4-PSK.

4. Le capacità dei canali binari discreti equivalenti sono, rispettivamente:

$$C = R_b\,[1 - H(p)] = \begin{cases} 3000 \text{ bit/s} \cdot [1 - H(0.034)] & = 2359 \text{ bit/s} & \text{2-PSK} \\ 3000 \text{ bit/s} \cdot [1 - H(0.098)] & = 1609 \text{ bit/s} & \text{2-FSK} \\ 6000 \text{ bit/s} \cdot [1 - H(0.098)] & = 3217 \text{ bit/s} & \text{4-PSK} \end{cases}$$

I risultati ottenuti mostrano che la massima capacità equivalente è ottenuta con la modulazione 4-PSK, seguita da 2-PSK e 2-FSK.
In tutti i casi non è superata la capacità del canale calcolata al punto 1. Essa è, infatti, un limite che non può essere superato, con qualsiasi modulazione,

Soluzione esercizio 6.8

1. Detto $\boldsymbol{r}$ il vettore che rappresenta il segnale ricevuto, il confine tra le regioni $\mathcal{R}_i$,$\mathcal{R}_j$ è determinato dall'equazione

$$p_i e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_i|^2/N_0} = p_j e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_j|^2/N_0} ,$$

che, poiché $|\boldsymbol{s}_i|^2 = |\boldsymbol{s}_j|^2$, diventa

$$\ln p_i + \frac{2}{N_0}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}_i = \ln p_j + \frac{2}{N_0}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}_j .$$

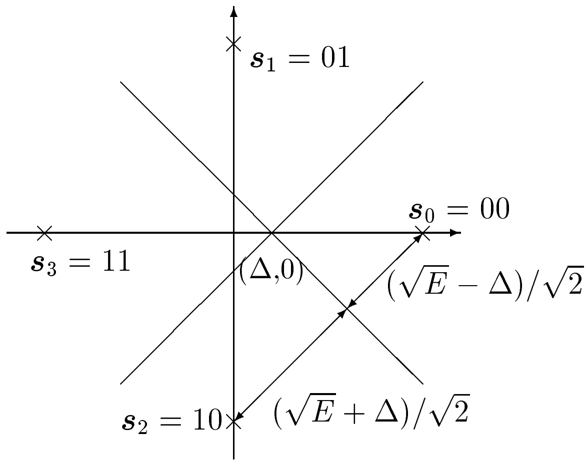
Ponendo $\lambda_i(\boldsymbol{r}) = \ln p_i + \frac{2}{N_0}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}_i$ e $\boldsymbol{r} = (x,y)$, si ha:

$$\begin{cases} \lambda_0(x,y) = 2\ln p + (2\sqrt{E}/N_0)x \\ \lambda_1(x,y) = \ln\,(pq) + (2\sqrt{E}/N_0)y \\ \lambda_2(x,y) = \ln\,(pq) - (2\sqrt{E}/N_0)y \\ \lambda_3(x,y) = 2\ln q - (2\sqrt{E}/N_0)x \end{cases}$$

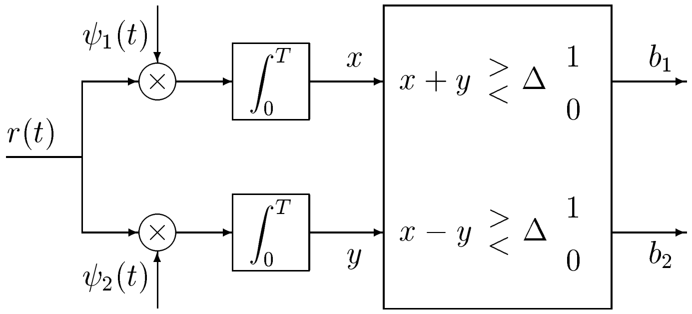
da cui si ottengono le equazioni dei confini:

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda_1 \to y = x - \Delta \\ \lambda_0 = \lambda_2 \to y = \Delta - x \\ \lambda_0 = \lambda_3 \to y = \Delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \to y = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_3 \to y = \Delta - x \\ \lambda_2 = \lambda_3 \to y = x - \Delta \end{cases} \qquad \text{con } \Delta = \frac{N_0}{2\sqrt{E}}\ln(q/p) .$$

Ne risultano le seguenti regioni di decisione:



2. Schema a blocchi del demodulatore:



3. Posto

$$\pi_{\pm} \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\frac{\sqrt{E}\pm\Delta}{\sqrt{N_0}} \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\left[\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\left(1\pm\sqrt{\frac{N_0}{4E_b}}\right)\right]$$

si ottengono le probabilità di errore sui bit condizionate alla trasmissione di ciascun simbolo analizzando le regioni di decisione:

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_{b1}(s_0) & = & \pi_- \\ P_{b1}(s_1) & = & \pi_- \\ P_{b1}(s_2) & = & \pi_+ \\ P_{b1}(s_3) & = & \pi_+ \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} P_{b2}(s_0) & = & \pi_- \\ P_{b2}(s_1) & = & \pi_+ \\ P_{b2}(s_2) & = & \pi_- \\ P_{b2}(s_3) & = & \pi_+ \end{array}\right.$$

Tenendo conto del fatto che

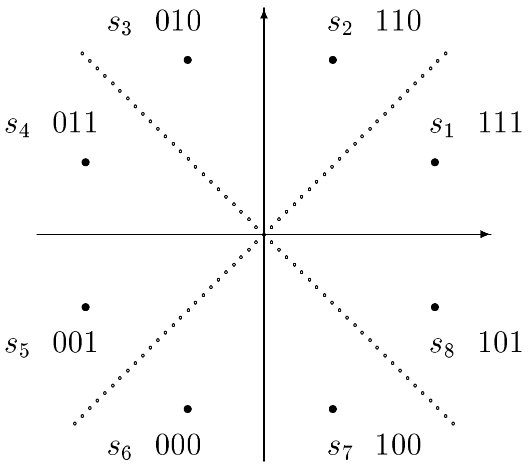
$$\mathrm{Prob}\,\{s_0\} = p^2,\;\; \mathrm{Prob}\,\{s_1\} = \mathrm{Prob}\,\{s_2\} = pq,\;\; \mathrm{Prob}\,\{s_3\} = q^2\;,$$

si ha

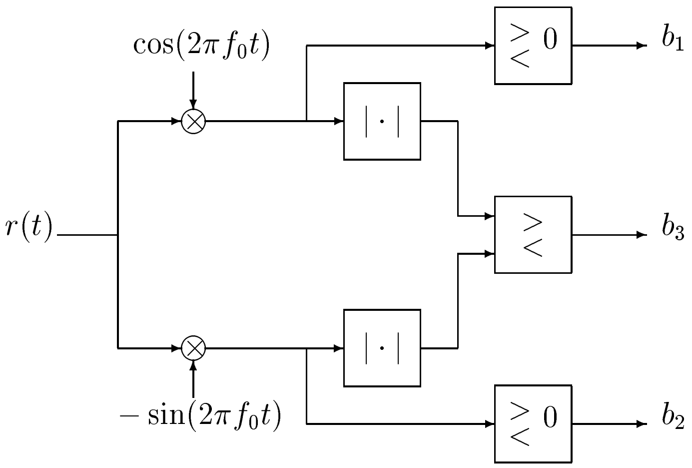
$$P_{b1} \;=\; P_{b2} \;=\; p\pi_- + q\pi_+\;.$$

Soluzione esercizio 6.9

1. Grazie all'associazione dei bit ai segnali secondo la codifica di Gray come riportato in figura



è possibile costruire il seguente schema per il demodulatore coerente dell'8-PSK in cui b_1,b_2,b_3 sono i bit ricevuti:



2. Supponendo che gli errori siano commessi solo verso simboli adiacenti, il canale discreto equivalente ammette la matrice di probabilità di transizione

$$
P = \begin{bmatrix}
1-2p_a & p_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_a \\
p_a & 1-2p_a & p_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_a & 1-2p_a & p_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & p_a & 1-2p_a & p_a & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_a & 1-2p_a & p_a & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & p_a & 1-2p_a & p_a & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_a & 1-2p_a & p_a \\
p_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_a & 1-2p_a
\end{bmatrix}
$$

dove

$$p_a = \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\left[\sqrt{\frac{3\mathcal{E}_b}{N_0}}\,\sin\frac{\pi}{8}\right] \quad .$$

Poiché il canale è simmetrico, la sua capacità vale

$$C = 3 + 2p_a \log_2 p_a + (1-2p_a)\log_2(1-2p_a) \quad .$$

Definendo $p = \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}$, si possono scrivere le matrici delle probabilità di transizione corrispondenti al 4-PSK e al 2-PSK:

$$P_{4-\mathrm{PSK}} = \begin{bmatrix} (1-p)^2 & p\,(1-p) & p^2 & p\,(1-p) \\ p\,(1-p) & (1-p)^2 & p\,(1-p) & p^2 \\ p^2 & p\,(1-p) & (1-p)^2 & p\,(1-p) \\ p\,(1-p) & (1-p)^2 & p\,(1-p) & p^2 \end{bmatrix} \qquad P_{2-\mathrm{PSK}} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

e quindi le corrispondenti capacità di canale sono:

$$\begin{aligned} C_{4-\mathrm{PSK}} &= 2 + (1-p)^2\log_2[(1-p)^2] + 2p(1-p)\log_2[p(1-p)] + p^2\log_2[p^2] \\ &= 2 + 2p\log_2 p + 2(1-p)\log_2(1-p) \\ &= 2\;C_{2-\mathrm{PSK}} \end{aligned}$$

Le capacità sono espresse in

$$\frac{\textbf{bit di informazione}}{\textbf{uso di canale}}$$

Se le vogliamo normalizzare per tenere conto del contenuto di bit trasmessi ad ogni uso di canale, occorre dividere per il numero medio di

$$\frac{\textbf{bit trasmessi}}{\textbf{uso di canale}}$$

Quindi, le capacità delle modulazioni in **bit di informazione/bit trasmessi** sono:

$\mathcal{E}_b/N_0$	$C_{2-\mathrm{PSK}} = C_{4-\mathrm{PSK}}/2$	$C_{8-\mathrm{PSK}}/3$
0	0.603	0.573
2	0.769	0.657
4	0.903	0.762
6	0.976	0.868
8	0.997	0.949
10	1.000	0.989

3. Definendo i segnali s_i con le relative associazioni di bit come in figura e le regioni di decisione $\mathcal{R}_i$ relative ai corrispondenti segnali si possono scrivere le probabilità

di errore sul bit nel modo seguente:

$$
\begin{cases}
P_{b1}(e|s_1) &= \text{Prob}\{\boldsymbol{r} \in \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{R}_4 \cup \mathcal{R}_5 \cup \mathcal{R}_6\} = \text{Prob}\left\{\nu_1 < -\sqrt{\mathcal{E}}\cos\frac{\pi}{8}\right\} \\
P_{b2}(e|s_1) &= \text{Prob}\{\boldsymbol{r} \in \mathcal{R}_5 \cup \mathcal{R}_6 \cup \mathcal{R}_7 \cup \mathcal{R}_8\} = \text{Prob}\left\{\nu_2 < -\sqrt{\mathcal{E}}\sin\frac{\pi}{8}\right\} \\
P_{b3}(e|s_1) &= \text{Prob}\{\boldsymbol{r} \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{R}_6 \cup \mathcal{R}_7\} \\
&= \text{Prob}\left\{\nu_1' < -\sqrt{\mathcal{E}}\cos\frac{\pi}{8}, \nu_2' < \sqrt{\mathcal{E}}\sin\frac{\pi}{8}\right\} \\
&+ \text{Prob}\left\{\nu_1' > -\sqrt{\mathcal{E}}\cos\frac{\pi}{8}, \nu_2' > \sqrt{\mathcal{E}}\sin\frac{\pi}{8}\right\}
\end{cases}
$$

dove ν_1,ν_2 sono le componenti di rumore lungo gli assi del sistema e ν_1',ν_2' sono le componenti lungo gli assi del sistema ruotati di $\frac{\pi}{4}$. In tutti i casi, sono variabili casuali incorrelate a valor medio nullo e varianza $N_0/2$. Quindi è possibile esprimere in forma chiusa le probabilità di errore sul bit in funzione di due parametri, p_1,p_2, definiti come

$$
\begin{cases}
p_1 &= \text{Prob}\left\{\nu > \sqrt{\mathcal{E}}\cos\frac{\pi}{8}\right\} = \frac{1}{2}\,\text{Erfc}\left[\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right] \\
p_2 &= \text{Prob}\left\{\nu > \sqrt{\mathcal{E}}\sin\frac{\pi}{8}\right\} = \frac{1}{2}\,\text{Erfc}\left[\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right]
\end{cases}
$$

Quindi, si ha:

$$
\begin{cases}
P_{b1}(e|s_1) &= p_2 \\
P_{b2}(e|s_1) &= p_1 \\
P_{b3}(e|s_1) &= p_1 + p_2 - 2p_1p_2
\end{cases}
$$

e quindi, poiché per simmetria si può togliere il condizionamento rispetto al segnale trasmesso, si ottiene:

$$
P_b(e) = \frac{2}{3}\,[p_1 + p_2 - p_1p_2]
$$

Soluzione esercizio 6.10

L'alterazione dell'ampiezza del segnale ricevuto non è fonte di errore per una modulazione di fase. Quindi, si può utilizzare la nota espressione della probabilità di errore sul bit con codifica di Gray dei bit condizionando rispetto ad α:

$$
P_b(e|\alpha) = \frac{1}{2}\,\text{Erfc}\left[\alpha\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right] ,
$$

Pertanto, la probabilità di errore del sistema si ottiene mediando l'espressione precedente:

$$P_b(e) = \int_0^\infty P_b(e|a)\ f_\alpha(a)\ da = \int_0^\infty \frac{1}{2}\ \text{Erfc}\left[a\ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right]\ 2a\ e^{-a^2}\ da = \frac{1}{2}\ \left[1 - \sqrt{\frac{E_b}{E_b + N_0}}\right]\ .$$

Soluzione esercizio 6.11

1. Il sistema di trasmissione risultante dalla combinazione dei due canali è equivalente ad un sistema in cui l'amplificazione del canale è la massima delle due amplificazioni, ovvero
$$y(t)\ =\ \alpha_{\max}(t) \cdot x(t) + \nu(t)\ ,$$
in cui la distribuzione di probabilità dei valori costanti sull'intervallo di simbolo è la distribuzione del massimo di due variabili casuali con distribuzione di probabilità $f_\alpha(a) = 2ae^{-a^2}$. Dal calcolo delle probabilità si sa che tale distribuzione è data dalla relazione seguente:
$$F_{\max}(a)\ =\ [F_\alpha(a)]^2\ =\ \left[1 - e^{-a^2}\right]^2\ .$$
Inoltre, poiché l'amplificazione non è causa di errore (essendo sempre positiva), la probabilità di errore sul bit può essere calcolata mediando quella condizionata rispetto ad $\alpha_{\max}$
$$P_b(e|a)\ =\ \frac{1}{2}\,\text{Erfc}\left[a\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right]\ .$$
Ponendo $\gamma = \sqrt{E_b/N_0}$, si ottiene integrando per parti
$$\begin{aligned} P_b(e)\ &=\ \int_0^\infty P_b(e|a)\ f_{\max}(a)\ da\ =\ \int_0^\infty P_b(e|a)\ dF_{\max}(a) \\ &=\ \int_0^\infty \frac{1}{2}\,\text{Erfc}\left[a\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right]\ d\left[\left(1 - e^{-a^2}\right)^2\right] \\ &=\ \frac{1}{2}\,\text{Erfc}[a\gamma]\ \left[1 - e^{-a^2}\right]^2\Big|_0^\infty\ +\ \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\ \int_0^\infty\ e^{-\gamma^2 a^2}\ \left[1 - 2e^{-a^2} + e^{-2a^2}\right]\ da \\ &=\ \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\ \int_0^\infty\ \left[e^{-\gamma^2 a^2} - 2e^{-(\gamma^2+1)a^2} + e^{-(\gamma^2+2)a^2}\right]\ da \\ &=\ \frac{1}{2}\ \left[1 - 2\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+1}} + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+2}}\right] \end{aligned}$$

2. Occorre sviluppare l'espressione trovata per $E_b/N_0 \to \infty$ per cui è conveniente fare la sostituzione di variabile $x = N_0/E_b = 1/\gamma^2$ e sviluppare l'espressione risultante in serie di Taylor attorno a $x = 0$. L'espressione di $P_b(e)$ diventa
$$P_b(e)\ =\ \frac{1}{2}\ \left[1 - \frac{2}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\right]\ .$$

Quindi, dallo sviluppo binomiale troncato

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \;=\; 1+\binom{-1/2}{1}x+\binom{-1/2}{2}x^2+O(x^3) \;=\; 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+O(x^3)\;,$$

si ottiene

$$P_b(e) \;=\; \frac{1}{2}\left[1-2+x-\frac{3x^2}{4}+1-x+\frac{3x^2}{2}\right]+O(x^3) \;=\; \frac{3x^2}{8}+O(x^3)\;.$$

Di qui si ricava che

$$P_b(e) \;\cong\; \frac{3}{8\,(E_b/N_0)^2}$$

per $E_b/N_0 \to \infty$.

3. Il caso in cui si hanno L canali indipendenti può essere trattato in modo analogo tenendo presente che, in questo caso, si deve considerare il massimo tra L variabili casuali statisticamente indipendenti che ha distribuzione cumulativa

$$F_{\max}(a) \;=\; [F_\alpha(a)]^L \;=\; \left[1-e^{-a^2}\right]^L\;.$$

Pertanto, la probabilità di errore sul bit è la seguente:

$$\begin{aligned}
P_b(e) \;&=\; \int_0^\infty P_b(e|a)\;dF_{\max}(a)\\
&=\; \int_0^\infty \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\left[a\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right]\;d\left[\left(1-e^{-a^2}\right)^L\right]\\
&=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}[a\gamma]\;\left[1-e^{-a^2}\right]^L\Big|_0^\infty \;+\; \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\;\int_0^\infty e^{-\gamma^2a^2}\;\sum_{k=0}^{L}\;(-1)^k\;\binom{L}{k}\;e^{-ka^2}\;da\\
&=\; \frac{1}{2}\;\sum_{k=0}^{L}\;(-1)^k\;\binom{L}{k}\;\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+k}}
\end{aligned}$$

Per ottenere l'espressione asintotica per $E_b/N_0 \to \infty$ poniamo $x = 1/\gamma^2$ e otteniamo

$$P_b(e) \;=\; \frac{1}{2}\;\sum_{k=0}^{L}\;(-1)^k\;\binom{L}{k}\;\frac{1}{\sqrt{1+kx}}\;.$$

Lo sviluppo in serie di questa espressione può essere ottenuto ricorrendo alle proprietà del simbolo binomiale e del fattoriale generalizzato $n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ nonché all'espansione

$$n^k \;=\; \sum_{m=1}^{k} S_m^k\;n^{(m)}\;,$$

dove i coefficienti S_m^k sono detti numeri di Stirling di seconda specie, per i quali vale la proprietà $S_k^k = 1$.

$$\begin{aligned}
P_b(e) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L} (-1)^k \binom{L}{k} \frac{1}{\sqrt{1+kx}} \, . \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L} (-1)^k \binom{L}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} k^n x^n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n \sum_{k=0}^{L} (-1)^k \binom{L}{k} k^n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n \sum_{k=0}^{L} (-1)^k \binom{L}{k} \sum_{m=1}^{n} S_m^n k^{(m)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n \sum_{m=1}^{n} S_m^n \sum_{k=0}^{L} (-1)^k \binom{L}{k} k^{(m)}
\end{aligned}$$

Si osservi che l'ultima sommatoria è non nulla se e solo se $m = L$. Infatti, se $m > L$, ogni termine $k^{(m)}$ è nullo, mentre se $m < L$, essa diventa

$$\begin{aligned}
L^{(m)} \sum_{k=m}^{L} \binom{L-m}{k-m} (-1)^k &= (-1)^m \, L^{(m)} \sum_{k=0}^{L-m} \binom{L-m}{k} (-1)^k \\
&= (-1)^m \, L^{(m)} \, (1-1)^{L-m} \\
&= 0 \, .
\end{aligned}$$

Per $m = L$, essa vale $(-1)^L \, L!$. Inserendo questi risultati nello sviluppo di $P_b(e)$ si ottiene

$$P_b(e) = \frac{1}{2} \sum_{n=L}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n \, (-1)^L \, S_L^n \, L!$$

da cui si ottiene l'approssimazione

$$P_b(e) = \frac{(2L-1)!!}{2^{L+1}} \, x^L + O(x^{L+1})$$

Di qui si ricava che

$$P_b(e) \cong \frac{(2L-1)!!}{2^{L+1} \, (E_b/N_0)^L}$$

per $E_b/N_0 \to \infty$.

Soluzione esercizio 6.12

Si consideri, per semplicità, il caso a due dimensioni. Utilizzando un'opportuna base ortonormale è possibile notare che la costellazione formata dai segnali:

$$s_1(t) = \left(\frac{d_{\min}}{2}, \frac{d_{\min}}{2} \right)$$

$$
\begin{aligned}
s_2(t) &= \left(-\frac{d_{\min}}{2}, \frac{d_{\min}}{2}\right) \\
s_3(t) &= \left(-\frac{d_{\min}}{2}, -\frac{d_{\min}}{2}\right) \\
s_4(t) &= \left(\frac{d_{\min}}{2}, -\frac{d_{\min}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

corrisponde ai vertici di un quadrato. In generale, data una base ortonormale $\{\Psi_i(t)\}_{i=1}^N$ di dimensione N, il generico segnale appartenente alla costellazione che corrisponde all'insieme dei vertici di un ipercubo N-dimensionale è rappresentabile mediante la notazione:

$$
s_i(t) = \sum_{k=1}^{N} s_k \, \Psi_k(t) \quad \text{con } s_k = \pm\frac{d_{\min}}{2}
$$

dove $d_{\min}$ rappresenta la distanza minima tra due segnali. Si noti inoltre che il numero di vertici dell'ipercubo N dimensionale è $M = 2^N$. L'energia di ciascun segnale, rappresentato mediante componenti $\{s_k(t)\}_{k=1}^N$ di un vettore a N dimensioni:

$$
s_i(t) \leftrightarrow \mathbf{s}_i = \left(\pm\frac{d_{\min}}{2}, \pm\frac{d_{\min}}{2}, \ldots, \pm\frac{d_{\min}}{2}\right)
$$

è:

$$
\mathcal{E}_i(t) = \| \mathbf{s}_i \|^2 = \sum_{k=1}^{N} s_k(t) = \sum_{k=1}^{N} \left(\pm\frac{d_{\min}}{2}\right)^2 = N\frac{d_{\min}^2}{4}
$$

Poiché i segnali sono equiprobabili l'energia media $\mathcal{E}_s$ della costellazione vale:

$$
\mathcal{E}_s = N\frac{d_{\min}^2}{4}
$$

Analizzando l'espressione del generico segnale $s_i(t)$ si nota che due segnali sono a distanza minima se differiscono per una sola componente. Dati i due segnali a minima distanza:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}_i &= \left(\pm\frac{d_{\min}}{2}, \pm\frac{d_{\min}}{2}, \ldots, \pm\frac{d_{\min}}{2}\right) \\
\mathbf{s}_j &= \left(\mp\frac{d_{\min}}{2}, \pm\frac{d_{\min}}{2}, \ldots, \pm\frac{d_{\min}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

si calcoli il coefficiente di correlazione γ:

$$
\gamma = \frac{<\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j>}{\sqrt{\| \mathbf{s}_i \|^2 \cdot \| \mathbf{s}_j \|^2}} = \frac{<\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j>}{\mathcal{E}_s}
$$

È facile verificare che il prodotto scalare tra i due segnali $\mathbf{s}_i$ e$\mathbf{s}_j$ vale:

$$< \mathbf{s}_i,\mathbf{s}_j >= \sum_{k=1}^{N} \left(\pm \frac{d_{\min}}{2} \right)^2 - \frac{d_{\min}^2}{4} = (N-2)\,\frac{d_{\min}^2}{4}$$

per cui si ha:

$$\gamma = \frac{N-2}{N}$$

Si consideri ora il caso in 4 dimensioni, in cui si ha $\mathcal{E}_s = d_{\min}^2$ e $M = 16$ segnali. Un esempio di base ortonormale $\{\Psi_i(t)\}_{i=1}^4$ è data da:

$$\Psi_i(t) = \frac{2}{\sqrt{T}} \qquad (i-1)\frac{T}{4} \leq t \leq i\frac{T}{4}$$

I segnali, aventi tutti energia $\mathcal{E}_i = d_{\min}^2$, sono rappresentabili come:

$$s_i(t) = \sum_{k=1}^{4} \pm \frac{d_{\min}}{2}\, \Psi_k(t)$$

Ad esempio, i segnali a minima distanza $s_1(t)$ e $s_2(t)$ aventi espressione:

$$\mathbf{s}_1 = \left(\frac{d_{\min}}{2}, \frac{d_{\min}}{2}, \frac{d_{\min}}{2}, \frac{d_{\min}}{2} \right)$$
$$\mathbf{s}_2 = \left(\frac{d_{\min}}{2}, \frac{d_{\min}}{2}, \frac{d_{\min}}{2}, -\frac{d_{\min}}{2} \right)$$

hanno il seguente andamento nel dominio del tempo:

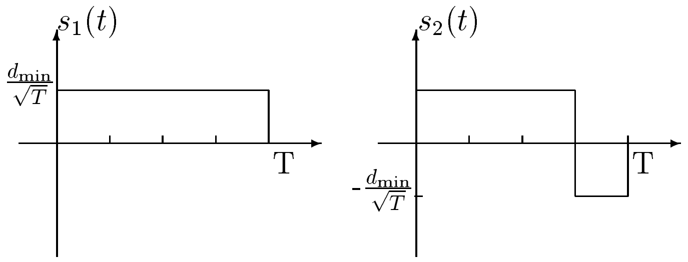


Figura 6.1 Andamento temporale di $s_1(t)$ e $s_2(t)$

È facile verificare che il coefficiente di correlazione vale:

$$\gamma = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}$$

Si ha infatti:

$$\gamma = \frac{1}{\mathcal{E}_s}\int_0^T s_1(t)\cdot s_2(t)\,dt = \frac{1}{\mathcal{E}_s}\left[\int_0^{3T/4}\frac{d_{\min}^2}{T}\,dt - \int_{3T/4}^{T}\frac{d_{\min}^2}{T}\,dt\right] = \frac{1}{\mathcal{E}_s}\left[\frac{3d_{\min}^2}{4} - \frac{d_{\min}^2}{4}\right] = \frac{1}{2}$$

Soluzione esercizio 6.13

Innanzitutto occorre trovare, mediante il procedimento di Gram-Schimdt, una base ortonormale per poter rappresentare i due segnali $s_0(t)$ e $s_1(t)$. Pertanto si avrà:

$$\Psi_0(t) = \frac{s_0(t)}{\|s_0(t)\|} = \frac{s_0(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_0}}$$

È facile verificare che l'energia del segnale $s_0(t)$ e quella del segnale $s_1(t)$ sono uguali e valgono :

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} = \int_0^T s_0^2(t)\,dt = \int_0^T \frac{A^2t^2}{T^2}\,dt = \frac{A^2T}{3}$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} = \int_0^T s_1^2(t)\,dt = \int_0^T \left[A - \frac{A^2t^2}{T^2}\right]dt = \frac{A^2T}{3}$$

Il primo versore della base ortonormale è, dunque:

$$\Psi_0(t) = \frac{s_0(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} = \frac{1}{T}\sqrt{\frac{3}{T}}t \qquad t \in (0,T)$$

si consideri ora:

$$v_1(t) = s_1(t) - < s_1(t),\Psi_0(t) > \Psi_0(t)$$

Il prodotto scalare $< s_1(t),\Psi_0(t) >$ vale:

$$< s_1(t),\Psi_0(t) > = \int_0^T s_1(t)\,\Psi_0(t)\,dt = \int_0^T \left[\frac{A}{T}\sqrt{\frac{3}{T}}t - \frac{A}{T^2}\sqrt{\frac{3}{T}}t^2\right]dt = \frac{AT}{6}\sqrt{\frac{3}{T}}$$

per cui:

$$v_1(t) = s_1(t) - < s_1(t),\Psi_0(t) > \Psi_0(t) = s_1(t) - \frac{A}{2T}t = A - \frac{3A}{2T}t$$

Si ha inoltre:

$$\|v_1(t)\|^2 = \int_0^T v_1^2(t)\,dt = \int_0^T \left(A^2 - \frac{9A^2}{4T^2}t^2 - \frac{3A^2}{T}t\right)dt = \frac{A^2T}{4}$$

dunque il secondo versore della base ortonormale risulta essere:

$$\Psi_1(t) = \frac{v_1(t)}{\|v_1(t)\|} = \frac{2}{\sqrt{T}} - \frac{3}{T\sqrt{T}}\,t$$

Calcolando la proiezione del segnale $s_1(t)$ su $\Psi_1(t)$ e utilizzando i risultati precedenti risulta immediato scrivere i segnali nella nuova base ortonormale trovata. Si ha dunque:

$$\begin{aligned}
< s_1(t), \Psi_1(t) > \; &= \int_0^T s_1(t)\,\Psi_1(t)\,dt = \frac{1}{2}A\sqrt{T} \\
s_0(t) \; &= A\sqrt{\frac{T}{3}}\,\Psi_0(t) \\
s_1(t) \; &= \frac{A}{2}\sqrt{\frac{T}{3}}\,\Psi_0(t) + \frac{A}{2}\sqrt{T}\,\Psi_1(t)
\end{aligned}$$

La struttura del ricevitore ottimo è quella a filtri adattati.

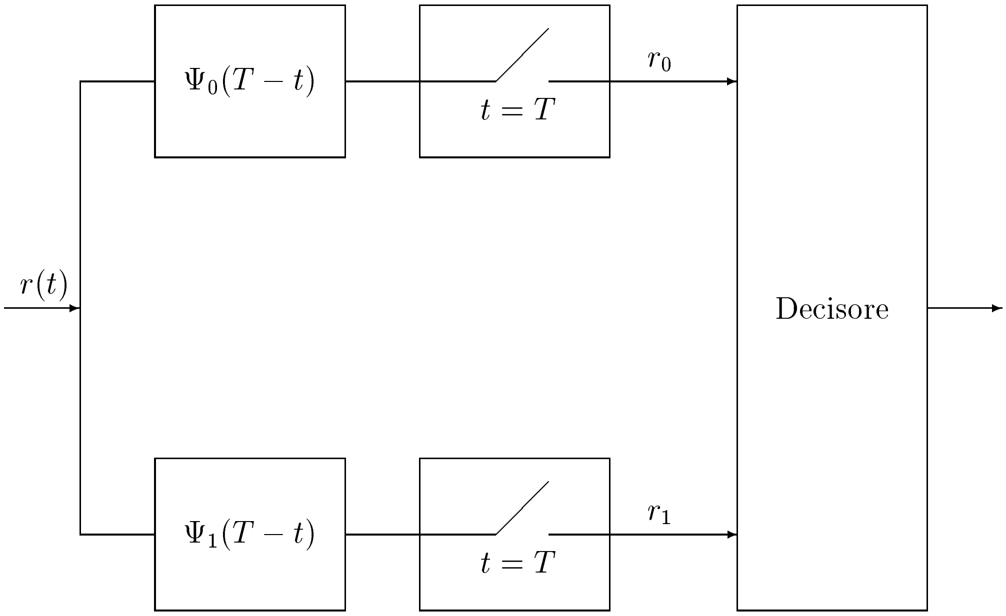


Figura 6.2 Struttura del ricevitore ottimo

Per il calcolo della probabilità d'errore media occorre innanzitutto calcolare la distanza minima. Si consideri la rappresentazione dei segnali mediante vettori a due componenti:

$$s_0(t) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{s}_0 = \left(A\sqrt{\frac{T}{3}}, 0\right)$$

$$s_1(t) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{s}_1 = \left(\frac{A}{6}\sqrt{3T}, \frac{A}{2}\sqrt{T}\right)$$

Si ha:

$$d_{\min} = \|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1\| = \sqrt{\frac{1}{12}A^2T + \frac{1}{4}A^2T} = A\frac{T}{3} = \sqrt{\mathcal{E}}$$

dunque:

$$P(e) = Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2N_0}}\right)$$

Soluzione esercizio 6.14

I segnali $s_0(t)$ e $s_1(t)$ del 2-FSK non ortogonale possono essere rappresentati come:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{T}} \cos\left[2\pi\left(f_c - \frac{\Delta f}{2}\right)t\right] \\ s_1(t) &= \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{T}} \cos\left[2\pi\left(f_c + \frac{\Delta f}{2}\right)t\right] \end{aligned}$$

dove $\Delta f \cdot T = 0.7$. È facile verificare che ciascun ha energia $\mathcal{E}_b$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \int_0^T s_0^2(t)\, dt = \mathcal{E}_b \\ \mathcal{E}_1 &= \int_0^T s_1^2(t)\, dt = \mathcal{E}_b \end{aligned}$$

La probabilità d'errore è:

$$P(e) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Si calcoli quindi la distanza d tra i due segnali:

$$\begin{aligned} d^2 &= \int_0^T |s_0(t) - s_1(t)|^2\, dt = \int_0^T \left[s_0^2(t) + s_1^2(t) - 2s_0(t) \cdot s_1(t)\right] dt = \\ &= 2\mathcal{E}_b - 4\frac{\mathcal{E}_b}{T}\int_0^T \cos\left[2\pi\left(f_c - \frac{\Delta f}{2}\right)t\right] \cdot \cos\left[2\pi\left(f_c + \frac{\Delta f}{2}\right)t\right] dt \end{aligned}$$

$$= 2\mathcal{E}_b - 2\frac{\mathcal{E}_b}{T}\left[\int_0^T \cos(4\pi f_c t)\ dt + \int_0^T \cos(2\pi \Delta f t)\ dt\right]$$

Poiché $f_c T \gg 1$ è possibile considerare nullo il primo integrale, per cui si ha:

$$\begin{aligned} d^2 &= 2\mathcal{E}_b \left(1 - \frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\pi\Delta f t)\ dt\right) = \\ &= 2\mathcal{E}_b \left[1 - \frac{1}{2\pi \Delta f T}\sin(2\pi\Delta f t)\right]_0^T = 2\mathcal{E}_b\left[1 - \mathrm{sinc}\left(2\Delta f \cdot T\right)\right] \end{aligned}$$

La probabilità d'errore risulta, quindi:

$$P(e) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{1 - \mathrm{sinc}(2\Delta f \cdot T)}\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \cong Q\left(1.1\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

Soluzione esercizio 6.15

Poiché i bit sono statisticamente indipendenti e uniformemente distribuiti, la probabilità d'errore media sul bit P_b è esprimibile come:

$$P_b(e) = \frac{1}{2}\left[P_b(e_1) + P_b(e_2)\right]$$

dove $P_b(e_1)$ indica la probabilità d'errore sul primo bit b_1, mentre $P_b(e_2)$ quella sul secondo bit b_2.

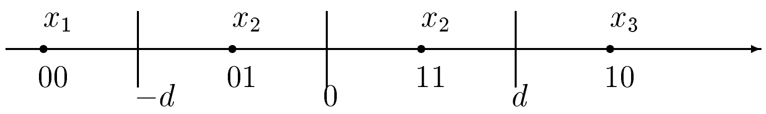


Figura 6.3 Rappresentazione dei segnali e confini delle regioni di decisione

Analizzando la Figura 6.3 è immediato verificare che i confini delle regioni di decisione sono: $0, \pm\, d$.
Si utilizzi la formula della probabilità totale per esprimere la probabilità d'errore sul primo bit:

$$P_b(e_1) = \sum_{i=1}^{4} P_b(e_1|x_i) \cdot P(x_i) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} P_b(e_1|x_i)$$

Si analizzi ora il termine $P_b(e_1|x_1)$; sapendo di aver trasmesso x_1 si commette errore sul primo bit se si riceve x_3 oppure x_4. Tenendo conto che $y = x + n$ e dei confini delle regioni di decisione si ha:

$$P_b(e_1|x_1) = P(y > 0|x_1) = P\left(n > \frac{3d}{2}\right) = Q\left(\frac{3d/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{3d}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

Per la simmetria della costellazione si ha:

$$P_b(e_1|x_1) = P_b(e_1|x_4)$$

Si consideri $P_b(e_1|x_2)$; in questo caso si ha ancora errore sul primo bit se si riceve x_3 o x_4. Si ha dunque:

$$P_b(e_1|x_2) = P(y > 0|x_2) = P\left(n > \frac{d}{2}\right) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) = P_b(e_1|x_3)$$

Il termine $P_b(e_1)$ vale quindi:

$$P_b(e_1) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} P_b(e_1|x_i) = \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{3d}{\sqrt{2N_0}}\right) + Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)\right]$$

Si ripetano tali considerazioni per il calcolo della probabilità d'errore sul secondo bit:

$$P_b(e_2) = \sum_{i=1}^{4} P_b(e_2|x_i) \cdot P(x_i) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} P_b(e_2|x_i)$$

È facile verificare che si ottiene:

$$\begin{aligned} P_b(e_2|x_1) &= P(-d< y <d|x_1) = P\left(\frac{d}{2} < n < \frac{5d}{2}\right) = \\ &= Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) - Q\left(\frac{5d}{\sqrt{2N_0}}\right) = P(e_2|x_4) \end{aligned}$$

$$P_b(e_2|x_2) = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) + Q\left(\frac{3d}{\sqrt{2N_0}}\right) = P(e_2|x_3)$$

quindi:

$$P_b(e_2) = \frac{1}{2}\left[2Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) + Q\left(\frac{3d}{\sqrt{2N_0}}\right) - Q\left(\frac{5d}{\sqrt{2N_0}}\right)\right]$$

La probabilità d'errore media sul bit risulta infine:

$$P_b(e) = \frac{1}{4}\left[3Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) + 2Q\left(\frac{3d}{\sqrt{2N_0}}\right) - Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)\right]$$

Soluzione esercizio 6.16

Si indichi con $\mathbf{r} = (x,y)$ il vettore che rappresenta il segnale ricevuto. Minimizzando la probabilità d'errore sul simbolo, la decisione si esprime nel modo seguente:

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg\max_{\mathbf{s}_m} f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)P(\mathbf{s}_m)$$

Le regioni di corretta decisione risultano quindi essere:

$$\mathcal{R}_m = \{\mathbf{r} : P(\mathbf{s}_m)f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) > P(\mathbf{s}_n)f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_n) \quad \forall n \neq m\}$$

dove:

$$P(\mathbf{s}_m) = p_m \quad P(\mathbf{s}_n) = p_n$$

Poiché $\|\mathbf{s}_m\|^2 = \|\mathbf{s}_n\|^2$ si ottiene:

$$\ln p_m + \frac{2}{N_0}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_m > \ln p_n + \frac{2}{N_0}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_n$$

Ponendo:

$$\lambda_i(\mathbf{r}) = \ln p_i + \frac{2}{N_0}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}_i$$

si ha:

$$\begin{cases} \lambda_0(x,y) = 2\ln\varepsilon + \frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}\,x + \frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}\,y \\ \lambda_1(x,y) = \ln[\varepsilon(1-\varepsilon)] + \frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}\,y - \frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}\,x \\ \lambda_2(x,y) = \ln[\varepsilon(1-\varepsilon)] - \frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}\,x - \frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}\,y \\ \lambda_3(x,y) = 2\ln(1-\varepsilon) + \frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}\,x - \frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}}\,y \end{cases}$$

La regione di decisione per il simbolo $\mathbf{s}_0$ diviene:
Ponendo:

$$\Delta = \frac{N_0}{\sqrt{8\mathcal{E}}}\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

si può scrivere:

$$\mathcal{R}_0 = \begin{cases} \lambda_0 > \lambda_1 \\ \lambda_0 > \lambda_2 \\ \lambda_0 > \lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{R}_0 = \begin{cases} x > \Delta \\ y > -x + \Delta \\ y > 2\Delta \end{cases}$$

Si noti che nel caso in cui $\Delta > 0$ si ha $1-\varepsilon > \varepsilon$, per cui è più probabile trasmettere un bit a 1. La regione di decisione per il simbolo $\mathbf{s}_1$ è:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y) : \ \lambda_1 > \lambda_0 \cap \ \lambda_1 > \lambda_2 \cap \ \lambda_1 > \lambda_3\}$$

quindi:

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} x < \Delta \\ y > 0 \\ y > x + \Delta \end{cases}$$

Procedendo in modo analogo per gli altri simboli si ottiene:

$$\mathcal{R}_2 = \{(x,y) : \ \lambda_2 > \lambda_0 \cap \ \lambda_2 > \lambda_1 \cap \ \lambda_2 > \lambda_3\}$$

quindi:

$$\mathcal{R}_2 = \begin{cases} y < -x + \Delta \\ y < 0 \\ x < -\Delta \end{cases}$$

e:

$$\mathcal{R}_3 = \{(x,y) : \ \lambda_3 > \lambda_0 \cap \ \lambda_3 > \lambda_1 \cap \ \lambda_3 > \lambda_2\}$$

quindi:

$$\mathcal{R}_3 = \begin{cases} y < 2\Delta \\ y < x + \Delta \\ x > -\Delta \end{cases}$$

Riassumendo i risultati finora ottenuti si può costruire il seguente grafico:

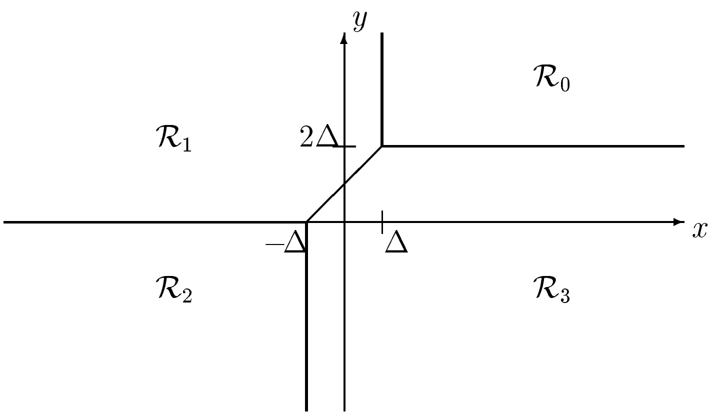


Figura 6.4 Regioni di decisione che minimizzano la P(e) sul simbolo

Per calcolare le regioni di decisione che minimizzano la probabilità d'errore sul bit si considerino i segnali a coppie; ad esempio, per il segnale $\mathbf{s}_0$ si considerino le coppie $(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_1)$; $(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_2)$; $(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_3)$. Per la coppia $(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_1)$ si tratta di determinare la soglia Δ in modo da minimizzare la seguente probabilità:

$$P_b(e) = \varepsilon^2 P_b(e|\mathbf{s}_0) + \varepsilon(1-\varepsilon) P_b(e|\mathbf{s}_1)$$

dove:

$$P_b(e|\mathbf{s}_0) = \frac{1}{2}\left[P_b(e_1|\mathbf{s}_0) + P_b(e_2|\mathbf{s}_0)\right]$$

indica la probabilità d'errore sul bit sapendo di aver trasmesso $\mathbf{s}_0$. Si noti inoltre che si è indicato con $P_b(e_1|\mathbf{s}_0)$ la probabilità di commettere un errore sul primo bit b_1. È facile verificare che si ha:

$$P_b(e_1|\mathbf{s}_0) = 0 \quad P_b(e_2|\mathbf{s}_0) = Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}/2}-\Delta}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

quindi:

$$P_b(e|\mathbf{s}_0) = \frac{1}{2}Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}/2}-\Delta}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Analogamente, la probabilità d'errore sul bit condizionata alla trasmissione di $\mathbf{s}_1$ vale:

$$P_b(e|\mathbf{s}_1) = \frac{1}{2}Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}/2}+\Delta}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

dunque risulta:

$$P_b(e) = \frac{1}{2}\varepsilon^2\, Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}/2}-\Delta}{\sqrt{N_0/2}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon(1-\varepsilon)\, Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}/2}+\Delta}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Si imponga ora l'annullamento della derivata rispetto a Δ in modo da minimizzare la probabilità d'errore sul bit:

$$\frac{\partial}{\partial\Delta}P_b(e) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi N_0}}\varepsilon^2 e^{-\frac{\left(\sqrt{\mathcal{E}/2}-\Delta\right)^2}{N_0}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi N_0}}\varepsilon(1-\varepsilon)e^{-\frac{\left(\sqrt{\mathcal{E}/2}+\Delta\right)^2}{N_0}} = 0 \;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; \Delta = \frac{N_0}{\sqrt{8\mathcal{E}}}\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

Si consideri ora la coppia ($\mathbf{s}_0$,$\mathbf{s}_2$); procedendo come prima ed indicando con γ la soglia della regione di corretta decisione si ottiene:

$$P_b(e) = \frac{1}{2}\varepsilon^2\, Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}}-\gamma/\sqrt{2}}{\sqrt{N_0/2}}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon(1-\varepsilon)\, Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}}+\gamma/\sqrt{2}}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

quindi:

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}P_b(e) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \gamma = \frac{N_0}{\sqrt{8\mathcal{E}}}\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \Delta$$

Si indichi ora con η la soglia per la coppia ($\mathbf{s}_0$,$\mathbf{s}_3$); è facile verificare che si ha:

$$P_b(e) = \frac{1}{2}\varepsilon^2\, Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}/2}-\eta}{\sqrt{N_0/2}}\right) + \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2\, Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}/2}+\eta}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

quindi:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}P_b(e) = 0 \quad\Rightarrow\quad \eta = \frac{2N_0}{\sqrt{8\mathcal{E}}}\ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) = 2\Delta$$

Riassumendo, la regione di corretta decisione $\mathcal{R}_0^{'}$ che minimizza la $P_b(e)$ per il simbolo $\mathbf{s}_0$ è:

$$\mathcal{R}_0^{'} = \mathcal{R}_0 = \begin{cases} x > \Delta \\ y > -x + \Delta \\ y > 2\Delta \end{cases}$$

Procedendo allo stesso modo per gli altri tre segnali si trovano le altre regioni di decisioni, che coincidono con quelle che minimizzano la probabilità d'errore sul simbolo; si può quindi concludere che anche le regioni di decisioni che minimizzano la probabilità d'errore sul bit sono quelle della figura trovata in precedenza.

Soluzione esercizio 6.17

Si riscriva il generico segnale $s_i(t)$ nella forma:

$$s_i(t) = \cos\left[2\pi\left(f_c + \frac{1}{2T}i\right)t\right][u(t) - u(t-T)]$$

Innanzitutto occorre verificare che i segnali $s_i(t)$ formino una base ortonormale; si ha:

$$\begin{aligned} < s_i(t), s_j(t) > &= \int_0^T s_i(t)\, s_j(t)\, dt = \int_0^T \cos\left[2\pi\left(f_c + \frac{1}{2T}i\right)t\right]\cdot\cos\left[2\pi\left(f_c + \frac{1}{2T}j\right)t\right]\, dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \left\{\cos\left[2\pi\left(2f_c + \frac{i+j}{2T}\right)t\right] + \cos\left[2\pi\left(\frac{i-j}{2T}\right)t\right]\right\}\, dt \end{aligned}$$

Con l'ipotesi $f_cT \gg 1$ si può considerare nullo il primo integrale, per cui rimane solamente:

$$< s_i(t), s_j(t) > = \frac{1}{2}\int_0^T \cos\left[2\pi\left(\frac{i-j}{2T}\right)t\right]\, dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{per } i = j \\ \frac{T}{2} sinc(i-j) = 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$$

È evidente che i segnali sono ortogonali ma non normalizzati; si deve quindi considerare la base:

$$\Psi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} s_i(t) \quad \text{con } i = 0,1,\ldots,M-1$$

In questo modo il segnale $x(t)$ risulta:

$$x(t) = \sqrt{2\mathcal{E}_b} \sum_{i=0}^{M-1} b_i \Psi_i(t)$$

rappresentabile nello spazio dei segnali come un vettore a M componenti:

$$\mathbf{x} = \left(b_0\sqrt{2\mathcal{E}_b},\ldots,b_{M-1}\sqrt{2\mathcal{E}_b}\right)$$

L'energia media $\mathcal{E}_s$ della costellazione vale:

$$E_s = E\left[\sum_{i=0}^{M-1} b_i^2 2\mathcal{E}_b\right] = M\mathcal{E}_b$$

dove M è il numero di bit e $\mathcal{E}_b$ rappresenta l'energia per bit. Si noti inoltre che le componenti del segnale trasmesso $\mathbf{x}$ costituiscono i vertici di un ipercubo M-dimensionale traslato nel punto:

$$\mathbf{v} = \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{2}},\ldots,\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{2}}\right)$$

La probabilità di corretta ricezione di M bit, data l'indipendenza, sarà uguale al prodotto della probabilità di ogni singola ricezione corretta. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} P(c) &= P(c|x_k) = P\left(\nu_0 < \frac{\sqrt{2\mathcal{E}_b}}{2},\ldots \nu_{M-1} < \frac{\sqrt{2\mathcal{E}_b}}{2}\right) = \\ &= P\left(\nu_0 < \frac{\sqrt{2\mathcal{E}_b}}{2}\right)\cdot P\left(\nu_1 < \frac{\sqrt{2\mathcal{E}_b}}{2}\right)\cdots P\left(\nu_{M-1} < \frac{\sqrt{2\mathcal{E}_b}}{2}\right) = \\ &= \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)\right]^M \end{aligned}$$

dove con $\nu_i \sim \mathcal{N}(0,N_0/2)$ si è indicata la proiezione del rumore sulla dimensione i-esima. La probabilità d'errore risulta dunque essere:

$$P(e) = 1 - P(c) = 1 - \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)\right]^M$$

Dall'espressione della probabilità d'errore è ancora più evidente che tutto il sistema è equivalente al parallelo di M canali binari simmetrici ed indipendenti con probabilità d'errore sul bit pari a:

$$P_b(e) = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

Soluzione esercizio 6.18

I $2M$ segnali possono essere rappresentati come:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_0 &= \left(\sqrt{\mathcal{E}},0,\ldots,0\right)\\
\mathbf{s}_1 &= \left(-\sqrt{\mathcal{E}},0\ldots,0\right)\\
\mathbf{s}_2 &= \left(0,\sqrt{\mathcal{E}},\ldots,0\right)\\
&\vdots\\
\mathbf{s}_{2(M-1)} &= \left(0,0,\ldots,\sqrt{\mathcal{E}}\right)\\
\mathbf{s}_{2(M-1)+1} &= \left(0,0,\ldots,-\sqrt{\mathcal{E}}\right)
\end{aligned}$$

La probabilità di errore è data da:

$$P(e) = 1 - P(c)$$

dove $P(c)$ indica la probabilità di corretta ricezione e si può ricavare in modo analogo all'esercizio precedente.

$$P(c) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\sqrt{\mathcal{E}}}^{\infty} e^{-x_1^2/N_0} \left[1 - 2Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}} + x_1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]^{M-1} dx_1$$

Applicando la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

osservando che nel campo di integrazione l'argomento della funzione $Q\left(\right)$ è sempre maggiore o uguale a zero per cui vale la diseguaglianza:

$$Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

e tenendo presente che tali quantità sono minori di uno si può scrivere:

$$P(c) \geq \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \sum_{k=0}^{M-1} \binom{M-1}{k} (-1)^k \int_{-\sqrt{\mathcal{E}}}^{\infty} e^{-x_1^2/N_0}\, e^{-k\left(\sqrt{\mathcal{E}} + x_1\right)^2/N_0}\, dx_1 =$$

Si consideri la funzione integranda:

$$\exp\left\{-\left[\frac{x_1^2}{N_0} + \frac{k\mathcal{E} + kx_1^2 + 2k\sqrt{\mathcal{E}}x_1}{N_0}\right]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\left[x_1^2(1+k) + 2k\sqrt{\mathcal{E}}x_1 + k\mathcal{E}\right]\right\} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\left[x_1^2(1+k)+2k\sqrt{\mathcal{E}}x_1+\frac{k^2\mathcal{E}}{1+k}+\frac{k\mathcal{E}}{1+k}\right]\right\} = \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\left[\left(x_1\sqrt{1+k}+k\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1+k}}\right)^2+\frac{k\mathcal{E}}{1+k}\right]\right\} = \\
&= \exp\left\{-\frac{k\mathcal{E}}{N_0(1+k)}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{\left(x_1\sqrt{1+k}+k\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1+k}}\right)^2}{N_0}\right\}
\end{aligned}
$$

Operando il cambiamento di variabile:

$$
\alpha = \sqrt{\frac{2}{N_0}}\left(x_1\sqrt{1+k}+k\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1+k}}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
dx_1 &= \sqrt{\frac{N_0}{2(1+k)}}\,d\alpha \\
\alpha_1 &= -\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{2(1+k)}}
\end{aligned}
$$

si ottiene:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\sqrt{\mathcal{E}}}^{\infty} \exp\left\{-x_1^2/N_0\right\}\,\exp\left\{-k\left(\sqrt{\mathcal{E}}+x_1\right)^2/N_0\right\}\,dx_1 = \\
&= \sqrt{\frac{N_0}{2(1+k)}}\exp\left\{-\frac{k\mathcal{E}}{N_0(1+k)}\right\}\int_{\alpha_1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\}\,d\alpha = \\
&= \exp\left\{-\frac{k\mathcal{E}}{N_0(1+k)}\right\}\sqrt{\frac{\pi N_0}{1+k}}\left[1-Q\left(\frac{\sqrt{2\mathcal{E}}}{\sqrt{N_0(1+k)}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

da cui:

$$
P(c) \ge \sum_{k=0}^{M-1}\binom{M-1}{k}(-1)^k\,\frac{1}{\sqrt{1+k}}\,e^{-\dfrac{k\mathcal{E}}{N_0(1+k)}}\left[1-Q\left(\frac{\sqrt{2\mathcal{E}}}{\sqrt{N_0(1+k)}}\right)\right]
$$

Infine si ha:

$$P(e) \le 1 - \sum_{k=0}^{M-1} \binom{M-1}{k} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{1+k}} e^{-\dfrac{k\mathcal{E}}{N_0(1+k)}} \left[1 - Q\left(\frac{\sqrt{2\mathcal{E}}}{\sqrt{N_0(1+k)}}\right)\right]$$

Nel caso $M = 1$, cioè nel 2-PAM, l'approssimazione risulta ovviamente esatta, mentre nel caso $M = 2$, ad esempio il 4-PSK, in cui $\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_b$ si ottiene:

$$P(e) \le Q\left(2\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\dfrac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)\right]$$

Soluzione esercizio 6.19

Le funzioni di verosimiglianza sono:

$$f(y|s_0) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y-A|} \qquad f(y|s_1) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y+A|}$$

dove si è posto:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$$

Le regioni di corretta decisione sono:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{y : f(y|x = +A) > f(y|x = -A)\} = \left\{y : \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y-A|} > \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y+A|}\right\} = \\ &= \{y : |y - A| < |y + A|\} = \{y : y > 0\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= \{y : f(y|x = -A) > f(y|x = +A)\} = \left\{y : \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y-A|} < \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y+A|}\right\} = \\ &= \{y : y < 0\} \end{aligned}$$

Poiché x assume con uguale probabilità i valori $\pm A$, la probabilità d'errore vale:

$$\begin{aligned} P(e) &= P(y < 0|x = A) = P(n < -A) = \int_{-\infty}^{-A} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|z|}\, dz = \\ &= \int_{A}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}z}\, dz = \frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}A} \end{aligned}$$

Si considerino ora le espressioni del rapporto segnale rumore nel caso di rumore n gaussiano e n laplaciano. Per il rumore gaussiano a media nulla e varianza $N_0/2$ si ha:

$$\mathrm{SNR}_G = \frac{E[x^2]}{E[n^2]} = \frac{A^2}{\frac{N_0}{2}}$$

mentre nel caso di distribuzione laplaciana, tenendo conto che:

$$E[n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|z|}\, dz = \sigma^2$$

si ha:

$$\mathrm{SNR}_L = \frac{E[x^2]}{E[n^2]} = \frac{A^2}{\sigma^2}$$

Si confrontino ora le probabilità d'errore a parità di rapporto segnale rumore

$$\mathrm{SNR} = \mathrm{SNR}_G = \mathrm{SNR}_L$$

Si ha:

$$\begin{aligned} P_G(e) &= Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\mathrm{SNR}}\right) \le \frac{1}{2} e^{-\mathrm{SNR}/2} \\ P_L(e) &= \frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}A} = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2\mathrm{SNR}}} \end{aligned}$$

quindi per SNR>2:

$$P_G(e) \le \frac{1}{2} e^{-\mathrm{SNR}/2} \le \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\mathrm{SNR}/2}} \le \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2\mathrm{SNR}}} = P_L(e)$$

In base a queste considerazioni si può concludere che, a parità di rapporto segnale rumore, il rumore con distribuzione di Laplace è più dannoso di quello Gaussiano.

Soluzione esercizio 6.20

La probabilità d'errore complessiva è la probabilità di commettere un numero dispari di errori negli n ripetitori; poiché gli errori di ogni ripetitore sono statisticamente indipendenti si può utilizzare la distribuzione di Bernoulli, per cui si ha:

$$P(e) = \sum_{k\ dispari}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} p^{2k+1} (1-p)^{n-2k-1} & n \text{ dispari} \\ \\ \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{2k+1} p^{2k+1} (1-p)^{n-2k-1} & n \text{ pari} \end{cases}$$

Sostituendo i valori $n = 50$ e $p = 10^{-7}$ e considerando soltanto i primi tre termini della sommatoria (gli altri non aggiungono contributi significativi) si trova:

$$P(e) = 4.9997e^{-6}$$

Soluzione esercizio 6.21

I segnali di una modulazione M-FSK ortogonale sono rappresentabili nello spazio dei vettori come:

$$\begin{aligned} \underline{s}_0 &= \left(\sqrt{\mathcal{E}},0,\ldots,0\right) \\ \underline{s}_1 &= \left(0,\sqrt{\mathcal{E}},\ldots,0\right) \\ &\vdots \\ \underline{s}_{M-1} &= \left(0,0,\ldots,\sqrt{\mathcal{E}}\right) \end{aligned}$$

dove $\mathcal{E} = \mathcal{E}_b \log_2 M$ rappresenta l'energia media della costellazione. La distanza minima in una costellazione M-FSK ortogonale è data da:

$$d_{\min}(FSK) = \sqrt{2\mathcal{E}} = \sqrt{2\mathcal{E}_b \log_2 M}$$

Si consideri ora la costellazione formata dagli M segnali $x_i(t) = s(t - iT)$. La distanza minima tra questi segnali risulta pari a:

$$d_{\min}(x) = \sqrt{2A^2 \frac{T}{M}}$$

in quanto la costellazione è costituita da segnali ortogonali con energia media pari:

$$\mathcal{E} = \int_0^T s^2(t)\, dt = A^2 \frac{T}{M}$$

Affinchè tale sistema abbia la stessa probabilità d'errore di un M-FSK ortogonale deve essere:

$$d_{\min}(x) = d_{\min}(FSK)$$

per cui si ricava:

$$\mathcal{E}_b \log_2 M = A^2 \frac{T}{M} \quad \Rightarrow \mathcal{P} = A^2 = \frac{M \log_2 M}{T} \mathcal{E}_b$$

Soluzione esercizio 6.22

Il guadagno asintotico di una costellazione S_1 rispetto alla costellazione S_2 è definito come:

$$\gamma(S_1,S_2) = 10 \log \left(\frac{d^2_{\min 1}(\mathcal{E}_b)}{d^2_{\min 2}(\mathcal{E}_b)} \right)$$

dove $d_{\min 1}(\mathcal{E}_b)$ rappresenta la distanza minima della costellazione S_1 espressa in funzione dell'energia media per bit $\mathcal{E}_b$. Si consideri la prima costellazione:

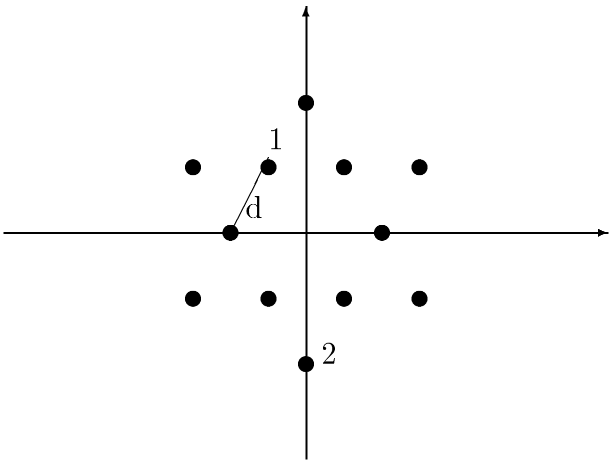


Figura 6.5 Costellazione S_1

Dalla figura è evidente che la distanza minima $d_{\min 1}$ tra i vari segnali è proprio quella indicata con d. È inoltre evidente che vi sono 6 segnali (etichettati con 1) che appartengono ad una circonferenza di raggio $r_1 = d = \sqrt{\mathcal{E}_1}$, mentre i rimanenti (etichettati con 2) giacciono su un circonferenza di raggio $r_2 = \sqrt{3}d = \sqrt{\mathcal{E}_2}$. L'energia media della costellazione vale quindi:

$$\mathcal{E}_{s1} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \|s_i\|^2 = \frac{1}{12} \left(6 \cdot \mathcal{E}_1 + 6 \cdot \mathcal{E}_2\right) = \frac{1}{12} \left(6d^2 + 6 \cdot 3d^2\right) = 2d^2 = 2d^2_{\min 1}$$

dove $\mathcal{E}_1$ indica l'energia associata ai segnali di tipo 1, mentre $\mathcal{E}_2$ quella associata ai segnali 2. Si esprima ora la distanza minima in funzione dell'energia media per bit $\mathcal{E}_b$:

$$\mathcal{E}_{s1} = \mathcal{E}_b \log_2 12 = 2d^2_{\min 1} \;\Rightarrow\; d^2_{\min 1} = \frac{\mathcal{E}_b}{2} \log_2 12$$

Si consideri ora la costellazione S_2.

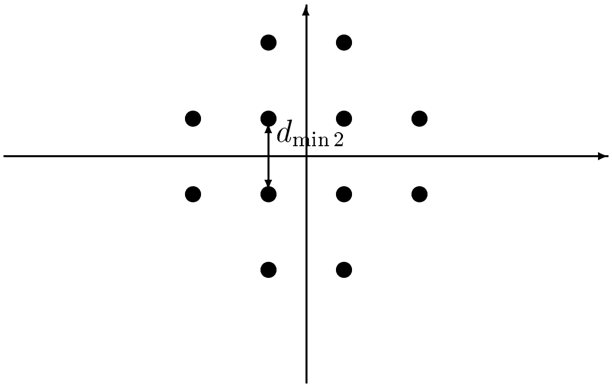


Figura 6.6 Costellazione S_2

La distanza minima è $d_{\min 2}$; quattro segnali giacciono sulla circorferenza di raggio

$$r'_1 = \frac{d_{\min 2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\mathcal{E}'_1}$$

e i rimanenti otto sulla circorferenza di raggio

$$r'_2 = \sqrt{\frac{10}{4}}\, d_{\min 2} = \sqrt{\mathcal{E}'_2}$$

L'energia media della costellazione vale:

$$\mathcal{E}_{s2} = \frac{1}{12}\left(4 \cdot \mathcal{E}'_1 + 8 \cdot \mathcal{E}'_2\right) = \frac{1}{12}\left(4 \cdot \frac{d^2_{\min 2}}{2} + 8 \cdot \frac{10 d^2_{\min 2}}{4}\right) = \frac{11}{6}\, d^2_{\min 2}$$

quindi:

$$\mathcal{E}_{s2} = \mathcal{E}_b \log 12 = \frac{11}{6}\, d^2_{\min 2} \;\Rightarrow\; d^2_{\min 2} = \frac{6}{11}\mathcal{E}_b \log_2 12$$

Il guadagno asintotico risulta essere:

$$\gamma(S_1,S_2) = 10 \log\left(\frac{d^2_{\min 1}(\mathcal{E}_b)}{d^2_{\min 2}(\mathcal{E}_b)}\right) = 10 \log\left(\frac{11}{12}\right) = -0.37 \text{ dB}$$

Soluzione esercizio 6.23

La probabilità d'errore sul bit può essere espressa come:

$$P_b(e) \;=\; P_b(e|x = \sqrt{\mathcal{E}_b}) \cdot P(x = \sqrt{\mathcal{E}_b}) + P_b(e|x = -\sqrt{\mathcal{E}_b}) \cdot P(x = -\sqrt{\mathcal{E}_b}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[P_b(e|x = \sqrt{\mathcal{E}_b}) + P_b(e|x = -\sqrt{\mathcal{E}_b})\right] = P_b(e|x = \sqrt{\mathcal{E}_b}) = P(y < 0|x = \sqrt{\mathcal{E}_b})$$

dove:

$$y = \begin{cases} y_1 & \text{se } g_1 \geq g_2 \\ y_2 & \text{se } g_1 < g_2 \end{cases}$$

Si analizzino ora le possibili combinazioni che si possono presentare al ricevitore a selezione:

g_1	g_2	$P(g_1,g_2) = P(g_1)P(g_2)$	y
0	0	0.01	y_1
0	1	0.09	y_2
1	1	0.81	y_1
1	0	0.09	y_1

Tabella 6.1 Possibili combinazioni presenti al ricevitore.

Si noti che per la probabilità congiunta delle variabili casuali discrete g_1 e g_2 si è sfruttata la loro indipendenza statistica. Avendo a disposizione la tabella precedente è possibile scrivere la probabilità d'errore come:

$$\begin{aligned}
P_b(e) = {} & E_{g_1,g_2}\left[P(y < 0|x = \sqrt{\mathcal{E}_b})\right] = \\
= {} & P(y < 0|x = \sqrt{\mathcal{E}_b}, g_1 = 0, g_2 = 0) \cdot P(g_1 = 0, g_2 = 0) + \\
& + P(y < 0|x = \sqrt{\mathcal{E}_b}, g_1 = 0, g_2 = 1) \cdot P(g_1 = 0, g_2 = 1) + \\
& + P(y < 0|x = \sqrt{\mathcal{E}_b}, g_1 = 1, g_2 = 1) \cdot P(g_1 = 1, g_2 = 1) + \\
& + P(y < 0|x = \sqrt{\mathcal{E}_b}, g_1 = 1, g_2 = 0) \cdot P(g_1 = 1, g_2 = 0) \\
= {} & P(n_1 < 0) \cdot 0.01 + P(n_2 < -\sqrt{\mathcal{E}_b}) \cdot 0.09 + P(n_1 < -\sqrt{\mathcal{E}_b}) \cdot 0.81 + \\
& + P(n_1 < -\sqrt{\mathcal{E}_b}) \cdot 0.09 = 0.5 \cdot 0.01 + 0.99 Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{2N_0}}\right) = \\
= {} & 0.005 + 0.99 Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{2N_0}}\right)
\end{aligned}$$

Si noti che per scrivere il risultato finale si è sfruttata l'identica distribuzione di probabilità delle variabili n_1 e n_2.

Soluzione esercizio 6.24

Tenendo conto dell'espressione di y_1 e y_2, è possibile scrivere il segnale y, su cui si basa la decisione, come:

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)\, x + \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 = \beta x + \nu$$

dove $\beta = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$ è una variabile casuale discreta che assume quattro valori, mentre ν è una variabile gaussiana a media nulla e varianza $\sigma^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)N_0/2$. Il rapporto segnale rumore, con g_1 e g_2 dati, vale:

$$SNR = \frac{E[|\beta x|^2]}{E[|\nu|^2]} = 2\frac{(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)^2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\, N_0}$$

Il massimo rapporto segnale rumore $SNR(\alpha_1,\alpha_2)$ si ottiene imponendo l'annulamento del gradiente, cioè:

$$\nabla SNR = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} SNR(\alpha_1,\alpha_2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} SNR(\alpha_1,\alpha_2) = 0 \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} 2(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) g_1 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 2\alpha_1 (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; g_1 \alpha_2 - g_2 \alpha_1 = 0 \\ 2(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) g_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 2\alpha_2 (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; g_2 \alpha_1 - g_1 \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

In corrispondenza di

$$\alpha = (\alpha_1,\alpha_1 \frac{g_2}{g_1})$$

il rapporto segnale rumore vale:

$$SNR(\alpha_1,\alpha_1 \frac{g_2}{g_1}) = 2\frac{E_b}{N_0}\left(g_1^2 + g_2^2\right)$$

Calcolando la matrice Hessiana nel punto α è facile verificare che tale punto corrisponde a un massimo, quindi si è massimizzato il SNR come desiderato. Si calcoli a questo punto la probabilità d'errore sul bit in corrispondenza dei coefficienti trovati; le variabili casuali β e ν risultano:

$$\beta = \alpha_1 \left(\frac{g_1^2 + g_2^2}{g_1}\right)$$

$$\nu \sim \mathcal{N}\left(0,\alpha_1^2 \frac{N_0}{2}\left(\frac{g_1^2 + g_2^2}{g_1}\right)\right)$$

Tenendo presente la Tabella 6.1 dell'esercizio precedente si ha:

$$
\begin{aligned}
P_b(e) &= E_{g_1,g_2}\left[P(y<0|x=\sqrt{E_b})\right] = E_{g_1,g_2}\left[P(\beta\sqrt{E_b}+\nu<0)\right] = \\
&= E_{g_1,g_2}\left[Q\left(\frac{\beta\sqrt{E_b}}{\alpha_1\sqrt{\frac{N_0}{2}}\,\frac{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{g_1}}\right)\right] = \\
&= E_{g_1,g_2}\left[Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\sqrt{g_1^2+g_2^2}\right)\right] = 0.01\cdot\frac{1}{2}+0.09Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) + \\
&+ 0.81Q\left(2\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)+0.09Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = \\
&= 0.005+0.81Q\left(2\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)+0.18Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)
\end{aligned}
$$

Siccome:

$$Q\left(2\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) < Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

la probabilità d'errore sul bit per un ricevitore a combinazione è minore di quella per un ricevitore a selezione.

Soluzione alternativa - lasciata come esercizio.

Utilizzare la disugualianza di Schwartz

$$|<\mathbf{a},\mathbf{b}>|^2 \leq |\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2$$

nell'espressione di SNR dove $\mathbf{a}=(x_1,x_2)$ e $\mathbf{b}=(g_1,g_2)$ e osservare che l'uguaglianza si ottiene per $\mathbf{a}=k\mathbf{b}$ dove k è una costante arbitraria.

Capitolo 7

Trasmissione di segnali PCM (soluzioni)

Richiami sul PCM

In questa sezione sono richiamati i concetti fondamentali relativi alla trasmissione di segnali di tipo PCM.

In quanto segue e ovunque non sia detto esplicitamente, consideriamo segnali analogici con distribuzione di probabilità arbitraria la cui massima ampiezza coincida con quella accettata dal quantizzatore (convertitore A/D) che si assume uniforme, ovvero con livelli di quantizzazione equispaziati su un opportuno intervallo $(-V,V)$.

Utilizziamo le seguenti notazioni:

$$\begin{cases} B & \text{banda del segnale analogico da trasmettere} \\ f_c = 2B & \text{minima frequenza di campionamento del segnale} \\ n & \text{numero di bit per campione del segnale} \\ R_b = 2nB & \text{velocità di trasmissione in bit/s} \\ M & \text{numero di simboli della modulazione scelta} \\ R_s = \dfrac{2nB}{\log_2 M} & \text{velocità di trasmissione in simboli/s o baud} \end{cases}$$

e la banda occupata dal segnale modulato è indicata con

$$B_T = \begin{cases} R_s/2 & \text{PAM in banda base} \\ R_s & \text{PSK} \end{cases}$$

Il rapporto segnale/rumore z_u dovuto all'effetto combinato dell'errore di quantizzazione (z_q) e dell'errore di trasmissione (z_e) è dato dall'espressione seguente:

$$\frac{1}{z_u} = \frac{1}{z_q} + \frac{1}{z_e} \qquad \text{dove} \qquad \begin{cases} z_q = 2^{2n} - 1 \\ z_e = \dfrac{1}{4p(1-p)} - 1 \end{cases}$$

Il contributo congiunto delle due sorgenti di rumore definisce una condizione di *soglia* in cui i rapporti segnale/rumore z_q e z_e sono uguali. Alla soglia valgono le relazioni

$$z_q = z_e = z^* \quad \Longrightarrow \quad p^* \cong 2^{-2(n+1)} ,$$

dove p^* è la probabilità di errore sul bit alla soglia.

Per rapporto segnale/rumore sopra soglia si intende $z_u = 2^{2n} - 1$. La probabilità di errore sul bit è data, in generale, dall'espressione approssimata

$$p \cong \text{Erfc}\left[\gamma \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right] ,$$

dove γ dipende dalla modulazione e si è trascurata la costante moltiplicativa.

Si osservi che un contenuto aumento del rapporto E_b/N_0 (anche meno di 1 dB) rispetto al valore di soglia è sempre sufficiente a ridurre il valore di z_e a tal punto da renderlo trascurabile rispetto a z_q e quindi il rapporto segnale/rumore in uscita $z_u \cong z_q$ con ottima approssimazione.

Questa è la condizione in cui si vuol fare operare in genere il sistema PCM, caratterizzata da un *margine di potenza* espresso in dB sufficiente a garantire il funzionamento sopra soglia.

Questo margine di potenza è un fattore moltiplicativo che amplifica il rapporto E_b/N_0 calcolato alla soglia, ovvero quello necessario per avere una probabilità di errore sul bit pari a p^*.

Il rapporto E_b/N_0 è legato al rapporto segnale/rumore z (che si avrebbe se si trasmettesse con la stessa potenza disponibile il segnale analogico in banda base) dalla relazione

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P \cdot T_b}{N_0} = \frac{P \cdot T_b \cdot B}{N_0 \cdot B} = \frac{P}{N_0 \cdot B} \cdot T_b B = z \cdot T_b B = \frac{zB}{R_b} = \frac{zB}{2nB} = \frac{z}{2n}$$

Soluzione esercizio 7.1

Poiché la banda dei segnali da trasmettere è $B = 4$ kHz, la minima frequenza di campionamento è

$$f_c \ = \ 2B \ = \ 2 \cdot 4 \text{ kHz} \ = \ 8 \text{ kHz}.$$

Poiché è richiesto un rapporto segnale rumore sopra soglia di almeno 60 dB, si deve avere

$$z_u \ = \ 2^{2n} \ > \ 10^6 \qquad \Longrightarrow \qquad n \ \geq \ 10 \text{ bit/campione trasmesso} \ .$$

Prendendo $n = 10$, la velocità di trasmissione del canale deve essere

$$R'_b \ = \ n \cdot f_c \ = \ 10 \cdot 8 \text{ kHz} \ = \ 80 \text{ kbit/s}$$

per ogni segnale trasmesso.

1. Poiché vogliamo trasmettere 12 canali, la velocità di trasmissione deve essere pari a

$$R_b \ = \ 12R'_b \ = \ 12 \cdot 80 \text{ kbit/s} \ = \ 960 \text{ kbit/s} \ .$$

2. Utilizzando la modulazione QPSK, si trasmettono 2 bit/simbolo per cui la velocità di segnalazione è $R_s = R_b/2 = 480$ kbaud. Il periodo di simbolo è quindi $T = 1/R_s$ e la banda del segnale modulato è $B_T = 1/T = R_s = 480$ kHz.

3. Per calcolare il rapporto E_b/N_0 che consente al sistema di lavorare alla soglia si può sfruttare la relazione

$$\frac{1}{4p^*} \ = \ 2^{2n} \ ,$$

dove p^* è la probabilità di errore sul bit di soglia. Da questa si ricava

$$p^* \ = \ \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \sqrt{\frac{E_b^*}{N_0}} \ = \ 2^{-2(n+1)} \ = \ 2^{-22} \ = \ 2.4 \cdot 10^{-7} \ .$$

Utilizzando il diagramma dell'appendice A, si ottiene che il valore di E_b^*/N_0 è pari a 11 dB.

Soluzione esercizio 7.2

La banda dei segnali da trasmettere è $B = 2.5$ kHz. Pertanto la frequenza minima di campionamento è $f_c = 2B = 5$ kcampioni/s.

Dovendo trasmettere 32 livelli, occorrono $n = 5$ bit/campione e quindi la velocità di trasmissione sul canale deve essere di almeno $R'_b = 25$ kbit/s.

Poiché il canale ha una banda che consente di trasmettere impulsi di durata non inferiore a 1μs, la massima velocità di trasmissione R_b è pari a 1 Mbit/s in quanto si utilizza una modulazione 2-PAM.

Quindi, il numero massimo di canali che si possono trasmettere è $R_b/R'_b = 40$.

Soluzione esercizio 7.3

1. Al fine di soddisfare la condizione sulla distorsione di quantizzazione $d_p = \Delta/2$ dove Δ è la distanza tra due livelli di quantizzazione adiacenti, occorre far sí che valga la disuguaglianza
$$d_p \;=\; \frac{\Delta}{2} \;=\; \frac{2A}{2^{n+1}} \;\leq\; 0.01 \cdot 2A \;.$$
Si vede facilmente che essa è soddisfatta se il numero dei bit per campione n è tale che $2^{n+1} > 1/0.01 = 100$, ovvero per $n \geq 6$.

2. La frequenza di campionamento deve essere almeno
$$f_c \;=\; 2B \;=\; 6 \text{ kHz} \;.$$

3. La velocità minima di trasmissione sul canale deve essere
$$R_b \;=\; nf_c \;=\; 36 \text{ kbit/s} \;.$$

4. Utilizzando la modulazione 16-PAM si trasmettono 4 bit per simbolo per cui la velocità minima di segnalazione deve essere
$$R_s \;=\; \frac{R_b}{4} \;=\; 9 \text{ kbaud} \;.$$

5. Poiché la banda di una modulazione PAM è pari a $B_T = 1/2T$, dove T è il periodo di simbolo del modulatore, si ha
$$B_T \;=\; \frac{1}{2T} \;=\; \frac{R_s}{2} \;=\; 4.5 \text{ kHz} \;.$$

6. Il rapporto segnale rumore di quantizzazione è determinato dal numero di bit per campione $n = 6$. Utilizzando una relazione nota si ha
$$z_q \;=\; 2^{2n} - 1 \;=\; 2^{12} - 1 \qquad (36 \text{ dB}) \;.$$

7. Il rapporto E_b/N_0 alla soglia è determinato dal valore della probabilità di errore sul bit
$$p^* \;=\; 2^{-2(n+1)} \;=\; 2^{-14} \;=\; 6.1 \cdot 10^{-5} \;.$$
Poiché la probabilità di errore sul bit per la modulazione M-PAM è data dalla relazione
$$p \;=\; \frac{M-1}{M\;\log_2 M}\;\mathrm{Erfc}\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M^2-1}\,\frac{E_b}{N_0}}\;,$$
si ha
$$p^* \;=\; 6.1 \cdot 10^{-5} \;=\; \frac{15}{64}\;\mathrm{Erfc}\sqrt{\frac{4}{85}\,\frac{E_b^*}{N_0}}\;.$$
Utilizzando il grafico dell'appendice A, si ottiene l'equazione
$$6.1 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{32}{15} \;=\; 1.3 \cdot 10^{-4} \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\sqrt{x}$$

e otteniamo il valore di x, 8.1 dB. Quindi

$$\frac{E_b^*}{N_0} \;=\; 8.1\ \text{dB} + 10\log_{10}\frac{85}{4} \;=\; 8.1 + 13.3 \;=\; 21.4\ \text{dB}\ .$$

Il valore molto elevato dipende dal fatto che le modulazioni M-PAM con M elevato sono piuttosto inefficienti.

Soluzione esercizio 7.4

1. Nel caso FM/FDM con deviazione di frequenza $\Delta f_e = 40$ kHz la banda occupata sul canale è

$$B_{\text{FM}} \;\cong\; 2\Delta f_e \;=\; 80\ \text{kHz}\ ,$$

da cui si ottiene il numero massimo di canali

$$N \;=\; \frac{W}{B_{\text{FM}}} \;=\; \frac{1\ \text{MHz}}{80\ \text{kHz}} \;\cong\; 12\ .$$

Detti P_T la potenza trasmessa e α l'attenuazione di potenza, il rapporto segnale rumore in uscita è

$$z_u \;=\; 3\alpha\,\frac{P_T}{N_0 B}\left(\frac{\Delta f_e}{B}\right)^2 \;=\; 10^{36/10}$$

da cui si ottiene

$$P_T \;=\; \frac{z_u N_0 B}{3\alpha}\left(\frac{B}{\Delta f_e}\right)^2 \;=\; \frac{10^{3.6}\cdot 10^{-7}\ \text{W/Hz}\cdot 4\cdot 10^3\ \text{Hz}}{3\cdot 10^2}\left(\frac{4\ \text{kHz}}{40\ \text{kHz}}\right)^2 \;\cong\; 0.5\ \text{W}\ .$$

2. Nel caso DSB-AM/FDM la banda occupata è

$$B_{\text{AM}} \;\cong\; 2B \;=\; 8\ \text{kHz}\ ,$$

da cui si ottiene il numero massimo di canali

$$N \;=\; \frac{W}{B_{\text{AM}}} \;=\; \frac{1\ \text{MHz}}{8\ \text{kHz}} \;=\; 125\ .$$

Il rapporto segnale/rumore in uscita è

$$z_u = \frac{\alpha P_T}{N_0 B} = 10^{36/10} \;\Longrightarrow\; P_T = \frac{z_u N_0 B}{\alpha} = \frac{10^{3.6}\cdot 10^{-7}\ \text{W/Hz}\cdot 4\cdot 10^3\ \text{Hz}}{10^{-2}} \cong 160\ \text{W}.$$

3. Utilizzando un sistema PCM/TDM occorre calcolare innanzitutto il numero di bit per campione richiesto per ottenere il rapporto segnale/rumore dato:

$$z_u \;\cong\; z_q \;=\; 2^{2n}-1 \;=\; 10^{3.6} \qquad\Longrightarrow\qquad n \;=\; 6\ .$$

Quindi la velocità di trasmissione per ciascun canale è

$$R_b \;=\; 2nB \;=\; 2\cdot 6\cdot 4\ \text{kHz} \;=\; 48\ \text{kbit/s}\ .$$

Con la banda disponibile di 1 MHz e la modulazione QPSK, si può trasmettere alla velocità

$$R'_b \;=\; 2W \;=\; 2\ \text{Mbit/s}\ .$$

Pertanto, il numero di canali che si possono trasmettere è

$$N \;=\; \frac{R'_b}{R_b} \;\cong\; 42\ .$$

La probabilità di errore richiesta alla soglia è

$$p^* \;=\; 2^{-2(n+1)} \;=\; 2^{-14} \;=\; 6.1\cdot 10^{-5} \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \qquad\Longrightarrow\qquad E_b/N_0 \;=\; 8.5\ \mathrm{dB}\ .$$

Prendendo un margine di 3 dB rispetto al rapporto E_b/N_0 trovato si può calcolare la potenza di trasmissione richiesta per ogni canale:

$$\frac{\alpha P_T}{R_b N_0} \;=\; 10^{(8.5+3)/10} \qquad\Longrightarrow\qquad P_T \;=\; 10^{1.15}\cdot\frac{48\cdot 10^3\ \mathrm{Hz}\cdot 10^{-7}\ \mathrm{W/Hz}}{10^{-2}} \;\cong\; 6.8\ \mathrm{W}\ .$$

Soluzione esercizio 7.5

Il rapporto segnale-rumore di quantizzazione (SNRQ) è definito come:

$$\mathrm{SNRQ} = \frac{E[x^2]}{E[|x-Q(x)|^2]}$$

Nel caso in cui il segnale sia distribuito uniformemente nell'intervallo $[-x_{\max}, x_{\max}]$ e quantizzato su un numero $N = 2^n$ di livelli sufficientemente elevato, è possibile approssimare SNRQ con l'espressione:

$$\mathrm{SNRQ} \cong \frac{P_x}{\frac{\Delta^2}{12}} = 3N^2\frac{P_x}{x^2_{\max}} = 3P_{x'}2^{2n}$$

dove $\Delta = \frac{2x_{\max}}{2^n}$ rappresenta l'ampiezza degli intervalli di decisione, mentre con $P_{x'}$ si indica la potenza del segnale normalizzato $x' = x/x_{\max}$.

Applicando tali risultati si ha:

$$P_{x'} \;=\; E\left[x'^2\right] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{SNRQ} \;=\; 3\frac{1}{3}2^{2n} = 2^{14} \;\Rightarrow\; (\mathrm{SNRQ})_{\mathrm{dB}} \cong 42\ \mathrm{dB}$$

Si noti che il valore di $(\mathrm{SNRQ})_{\mathrm{dB}}$ è calcolabile immediatamente con la "Regola del 6n"[1]:

$$(\mathrm{SNRQ})_{\mathrm{dB}} \cong P_{x'}|_{dB} + 4.8 + 6n \cong 42 \text{ dB}$$

Soluzione esercizio 7.6

Applicando la "Regola del 6n" è possibile esprimere il rapporto segnale-rumore di quantizzazione $\mathrm{SNRQ}|_{dB}$ in funzione del numero di livelli con cui il segnale viene quantizzato:

$$(\mathrm{SNRQ})_{\mathrm{dB}} \cong P_{x'}|_{dB} + 4.8 + 6n$$

dove il numero di livelli è $N = 2^n$. Il segnale normalizzato $x'(t) = x(t)/x_{\max}$, essendo $x_{\max} = 1$, è pari a $x(t)$, quindi la potenza $P_{x'}$ risulta essere:

$$P_{x'} = P_x = R_x(0) = 1$$

Imponendo che $\mathrm{SNRQ}|_{dB} \geq 90$ dB, si trova:

$$P_{x'}|_{dB} + 4.8 + 6n \geq 90 \text{ dB} \;\Rightarrow\; n = \left\lceil \frac{85.2}{6} \right\rceil = 15$$

dunque $N = 2^{15} = 32768$ livelli.

Soluzione esercizio 7.7

Per il calcolo della densità di probabilità di $y(t) = x(t) - Q(x(t))$ si proceda trovando prima la distribuzione cumulativa $F_Y(\alpha)$ e successivamente si derivi rispetto ad α tale funzione:

$$f_Y(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} F_Y(\alpha) \, .$$

È evidente che la distribuzione cumulativa $F_Y(\alpha)$ è esprimibile come:

$$F_Y(\alpha) = P(y < \alpha) = \sum_{i=1}^{4} P\left(y < \alpha \, , x \in \mathcal{R}_i\right)$$

dove $\mathcal{R}_i$ sono le regioni di quantizzazione.
Esprimendo la densità di probabilità di $x(t)$ nella forma:

$$f_X(x) \;=\; \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & -2 \leq x < 0 \\ \\ -\frac{x}{4} + \frac{1}{2} & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

[1]deriva dall'espressione di SNRQ approssimata, espressa in dB

si ha:

$$P\,(y<\alpha\,,x\in\mathcal{R}_1)\;=\;P\,(x+1.5<\alpha\,,x\in[-2,-1])=$$

$$=\begin{cases} 0 & \alpha<-0.5\\[2mm] \displaystyle\int_{-2}^{\alpha-1.5}\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}+1 & -0.5\le\alpha\le0.5\\[2mm] \dfrac{1}{8} & \alpha>0.5\end{cases}$$

Si noti che non si è volutamente sviluppato rispetto ad α, in quanto in seguito occorre derivare. Procedendo nello stesso modo per il calcolo degli altri contributi, si ottiene:

$$P\,(y<\alpha\,,x\in\mathcal{R}_2)\;=\;P\,(x+0.5<\alpha\,,x\in[-1,0])=$$

$$=\begin{cases} 0 & \alpha<-0.5\\[2mm] \displaystyle\int_{-1}^{\alpha-0.5}\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}+\frac{1}{2} & -0.5\le\alpha\le0.5\\[2mm] \dfrac{3}{8} & \alpha>0.5\end{cases}$$

$$P\,(y<\alpha\,,x\in\mathcal{R}_3)\;=\;P\,(x-0.5<\alpha\,,x\in[0,1])=$$

$$=\begin{cases} 0 & \alpha<-0.5\\[2mm] -\dfrac{1}{8}\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right) & -0.5\le\alpha\le0.5\\[2mm] \dfrac{3}{8} & \alpha>0.5\end{cases}$$

$$P\,(y<\alpha\,,x\in\mathcal{R}_4)\;=\;P\,(x-1.5<\alpha\,,x\in[1,2])=$$

$$=\begin{cases} 0 & \alpha<-0.5\\[2mm] -\dfrac{1}{8}\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2} & -0.5\le\alpha\le0.5\\[2mm] \dfrac{1}{8} & \alpha>0.5\end{cases}$$

A questo punto è sufficiente sommare i vari contributi e derivare:

$$
\begin{aligned}
f_Y(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial\alpha} P(y<\alpha) = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)+2=1 & -0.5\le\alpha\le 0.5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dalla relazione precedente risulta, dunque, che $y(t)$ è distribuito in modo uniforme nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Il rapporto segnale-rumore di quantizzazione vale:

$$
\text{SNRQ} = \frac{E[x^2]}{E[y^2]} = \frac{2\int\limits_0^2 \left(-\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{2}\right)dx}{\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\,dx} = \frac{2\left[-\frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{6}\right]_0^2}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}} = 8 \;\Rightarrow\; 9 \text{ dB}
$$

Si noti che in questo caso la relazione:

$$
\text{SNRQ} \cong 3P_{x'}\cdot 2^{2n}
$$

fornisce esattamente il valore SNRQ $=8$, essendo:

- $x_{\max}=2$;
- $P_{x'} = \dfrac{P_x}{x_{\max}^2} = \dfrac{E[x^2]}{4} = \dfrac{1}{6}$;
- $n=2$ poiché si quantizza su 4 livelli;

Il compander ottimo per il processo stazionario $x(t)$ distribuito secondo $f_X(x)$ è dato da:

$$
g(x) = y_{\max}\left[\frac{2\int\limits_{-\infty}^{x}[f_X(v)]^{\frac{1}{3}}\,dv}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f_X(v)]^{\frac{1}{3}}\,dv} - 1\right]
$$

Poiché $g(-x)=-g(x)$ è sufficiente analizzare il caso $x\le 0$:

$$
g(x) = \begin{cases} -y_{\max} & x\le -2 \\ y_{\max}\left[\dfrac{2\int\limits_{-2}^{x}\left[\frac{v}{4}+\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{3}}dv}{2\int\limits_{-2}^{0}\left[\frac{v}{4}+\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{3}}dv} - 1\right] & -2<x\le 0 \end{cases}
$$

Essendo:

$$\int_{-2}^{x} \left[\frac{v}{4}+\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{3}} dv \;=\; 3\left[\left(\frac{v}{4}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\right]_{-2}^{x} = 3\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right]^{\frac{4}{3}}$$

$$\int_{-2}^{0} \left[\frac{v}{4}+\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{3}} dv \;=\; \frac{3}{\sqrt[3]{16}}$$

si ottiene:

$$g(x) = \begin{cases} -y_{\max} & x \le -2 \\ y_{\max}\left[\sqrt[3]{16}\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} - 1\right] & -2 < x \le 0 \\ y_{\max}\left[-\sqrt[3]{16}\left(-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + 1\right] & 0 < x \le 2 \\ y_{\max} & x \ge 2 \end{cases}$$

Utilizzando il compander ottimo l'SNRQ risultante è:

$$\text{SNRQ} = \frac{P_x}{D_{opt}}$$

dove D_{opt}, che indica la distorsione ottima, vale :

$$D_{opt} \;=\; \frac{2^{-2n}}{12}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt[3]{f_X(v)}\, dv\right)^3 = \frac{1}{12\cdot 16}\cdot\left(\frac{2\cdot 3}{\sqrt[3]{16}}\right)^3 = \frac{9}{128}$$

Si ha, quindi:

$$\text{SNRQ} = \frac{P_x}{D_{opt}} = \frac{E\left[x^2\right]}{D_{opt}} = \frac{2/3}{9/128} = \frac{256}{27} = 9.\,48 \;\Rightarrow\; \cong 10 \text{ dB}$$

Si noti come l'uso del compander ottimo migliori il rapporto segnale-rumore di quantizzazione, facendolo passare da un valore pari ad 8 ad uno di circa 9.5.

Soluzione esercizio 7.8

Si esprima innanzitutto la durata d del brano musicale in secondi:

$$d = 4.\,27 \text{ min} = 4.\,27\cdot 60 = 256.\,2 \text{ s}$$

La frequenza di campionamento $f_c = 44.\,1$ kHz esprime il numero di campioni al secondo considerati; poiché tali campioni vengono quantizzati su 16 bit per canale stereo, il numero di bit utilizzati per memorizzare il brano musicale è:

$$k = 256.2 \ [\mathrm{s}] \cdot 44.1 \cdot 10^3 \ \left[\frac{\text{campione}}{\text{s}}\right] \cdot 32 \ \left[\frac{\text{bit}}{\text{campione}}\right] = 361549440 \text{ bit}$$

Per esprimere il risultato in kbytes é sufficiente ricordare che:

$$1 \text{ kbytes} = 8 \cdot 1024 \text{ bit}$$

quindi:

$$k = 361549440 \text{ bit} = \frac{361549440}{8 \cdot 1024} = 44134.4 \text{ kbytes}$$

Soluzione esercizio 7.9

Si rappresentino i campioni del segnale quantizzato mediante stringhe del tipo

$$\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots b_{n-1})$$

dove $b_i \in \{\pm 1\}$. Il campione $\hat{x}(\mathbf{b})$ vale:

$$\hat{x}(\mathbf{b}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta}{2} 2^i \, b_i$$

Si supponga di trasmettere $\mathbf{b}$ e di ricevere la stringa $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots a_{n-1})$; indicando con $P(a_i \neq b_i) = p$ la probabilità di errore sul bit, è possibile scrivere lo scarto quadratico medio tra il campione trasmesso $\hat{x}(\mathbf{b})$ e il campione ricevuto $\hat{x}(\mathbf{a})$ come:

$$\begin{aligned}
E\Big[|\hat{x}(\mathbf{b}) - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{a})|^{\mathbf{2}}\Big] &= \frac{\Delta^2}{4} E\left[|\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \, b_i - \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \, a_i|^2\right] = \frac{\Delta^2}{4} E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} 2^{i+j} \, (b_i - a_i)(b_j - a_j)\right] \\
&= \frac{\Delta^2}{4} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} 2^{i+j} \, E[b_i b_j - b_i a_j - a_i b_j + a_i a_j]
\end{aligned}$$

Per $i \neq j$, a_i, b_i sono indipendenti da a_j, b_j quindi è facile verificare che il termine:

$$E\left[b_i b_j - b_i a_j - a_i b_j + a_i a_j\right] = E[b_i]E[b_j] - E[b_i]E[a_j] - E[a_i]E[b_j] + E[a_i]E[a_j]$$

è nullo in quanto le variabili a_i e b_i hanno entrambe media nulla. Se $i = j$ si ha:

$$\begin{aligned}
E[b_i^2] &= E[a_i^2] = 1 \\
E[a_i b_i] &= E[b_i a_i] = \frac{1}{2}\left[1 \cdot 1(1-p) + (-1) \cdot (-1)(1-p) + (+1) \cdot (-1)p + (-1) \cdot (+1)p\right] = \\
&= 1 - 2p
\end{aligned}$$

dunque si ottiene:

$$E\left[|\hat{x}(\mathbf{b})-\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{a})|^{\mathbf{2}}\right] = \frac{\Delta^2}{4}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{2i}\left(2-2+4p\right) = \Delta^2 p\frac{2^{2n}-1}{2^2-1} = \frac{\Delta^2}{3}p\left(2^{2n}-1\right)$$

Poichè si utilizza un PCM uniforme, assumendo che non ci sia errore di overload, cioè che i campioni siano distribuiti sull'intervallo $[-x_{\max},x_{\max}]$, è possibile esprimere Δ come:

$$\Delta = \frac{2x_{\max}}{N} = \frac{x_{\max}}{2^{n-1}}$$

Il rapporto segnale-rumore SNR_e dovuto ad errori di trasmissione sul canale è:

$$\mathrm{SNR}_e = \frac{E[x^2]}{E\left[|\hat{x}(\mathbf{b})-\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{a})|^{\mathbf{2}}\right]}$$

Introducendo il segnale normalizzato $x'(t) = x(t)/x_{\max}$, a cui è associata la potenza $P_{x'} = P_x/x^2_{\max}$, si trova:

$$\mathrm{SNR}_e = \frac{3P_x}{\Delta^2\, p(2^{2n}-1)} = \frac{3P_x 2^{2n-2}}{x^2_{\max}\, p(2^{2n}-1)} = 3P_{x'}\frac{2^{2n-2}}{p(2^{2n}-1)}$$

Il rapporto segnale-rumore di quantizzazione SNRQ è:

$$\mathrm{SNRQ} = 3P_{x'}2^{2n}$$

A questo punto è possibile esprimere il rapporto segnale-rumore complessivo SNR in funzione del numero di bit di quantizzazione n, della probabilità d'errore p e del valore quadratico medio del segnale normalizzato x':

$$\mathrm{SNR} = \left(\frac{1}{\mathrm{SNR}_e}+\frac{1}{\mathrm{SNRQ}}\right)^{-1} = \frac{3P_{x'}2^{2n}}{1+4p(2^{2n}-1)}$$

Capitolo 8

Interferenza intersimbolica (soluzioni)

Modello di riferimento per problemi di interferenza intersimbolica

In questa sezione sono presentati esercizi di calcolo di prestazioni in presenza di interferenza intersimbolica seguendo un modello di riferimento specificato dalle seguenti parti:

- **Generatore:** il segnale trasmesso è modulato secondo lo schema 2-PAM:

  $$x(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \; s(t-nT)\;.$$

  I simboli della sequenza modulante (α_n) sono statisticamente indipendenti ed equiprobabili:

  $$\text{Prob}\,\{\alpha_n \;=\; \pm\, A\} \;=\; \frac{1}{2}\;.$$

  La trasformata di Fourier del segnale base $s(t)$, $S(f)$ è detta la funzione di trasferimento del *filtro formatore* che, idealmente, filtra il "segnale"

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \; \delta(t-nT)$$

  e genera $x(t)$.
- **Canale:** E' lineare e quindi specificato dalla sua funzione di trasferimento $C(f)$; indichiamo la risposta all'impulso del canale con $h_C(t)$.
- **Rumore additivo:** E' il processo casuale $w(t)$ con spettro di potenza $G_w(f)$ (non necessariamente bianco) che si somma al segnale in uscita dal canale producendo il segnale ricevuto.

- □ **Filtro di ricezione:** E' il filtro posto prima del dispositivo di decisione a soglia del demodulatore specificato dalla sua funzione di trasferimento $U(f)$. Indichiamo la sua risposta all'impulso con $h_U(t)$.

La funzione

$$Q(f) \;=\; S(f)\cdot C(f)\cdot U(f)\;.$$

è la trasformata di Fourier del segnale base riportato all'uscita e viene anche detta funzione di trasferimento complessiva del sistema.

E' bene tenere presenti le due limitazioni fondamentali di questo schema di riferimento, ovvero l'indipendenza statistica della sequenza modulante e la linearità del canale.

Nel seguito si farà riferimento alla funzione di trasferimento a coseno rialzato normalizzata definita nel modo seguente

$$R_\alpha(f) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{T} & |f| < \dfrac{1-\alpha}{2T} \\ \dfrac{1}{2T}\left\{1 \;+\; \cos\left[\dfrac{\pi(2|f|T-1+\alpha)}{2\alpha}\right]\right\} & \dfrac{1-\alpha}{2T} < |f| < \dfrac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & |f| > \dfrac{1+\alpha}{2T} \end{cases}$$

dove T è il periodo di segnalazione e α è detto coefficiente di *roll-off*.

Molti problemi di telecomunicazioni sono problemi di ottimizzazione di funzioni o funzionali, generalmente vincolati. In particolare, alcuni problemi di interferenza intersimbolica richiedono la ricerca dei valori estremi di un funzionale dipendente da una funzione incognita sulla quali sono imposti dei vincoli, anch'essi sotto forma di funzionali.

Per questo motivo, sono riportate di seguito le nozioni relative alla ricerca dei valori estremi di funzioni di variabili vincolate mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cenni di analisi funzionale applicata alla ricerca dei valori estremi di funzionali vincolati.

Calcolo dei valori estremi di una funzione in più variabili

Il calcolo dei valori estremi di una funzione $f(x)$ in una sola variabile definita su un intervallo reale $[a,b]$, continua fino alla sua derivata seconda è un problema la cui soluzione è ben nota dal calcolo elementare. L'annullamento della derivata $f'(x)$ è condizione necessaria all'esistenza di un valore estremo in un punto interno ad $[a,b]$ che viene quindi riconosciuto come massimo, minimo o punto di flesso considerando il segno della derivata seconda:

$$f'(x_0)=0 \;\text{ e }\; \begin{cases} f''(x_0)<0 \\ f''(x_0)>0 \\ f''(x_0)=0 \end{cases} \Longrightarrow \text{ è un } \begin{array}{l} \textbf{massimo}\text{ locale} \\ \textbf{minimo}\text{ locale} \\ \textbf{punto di flesso} \end{array}$$

Questo risultato è valido se x_0 è un punto *interno* al dominio di definizione della funzione $f(x)$. In caso contrario, i valori estremi possono essere raggiunti sulla frontiera del dominio senza soddisfare le condizioni su esposte.

Consideriamo una funzione $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ continua insieme alle sue derivate parziali rispetto a tutte le variabili almeno fino al secondo ordine e indichiamo con $\boldsymbol{x}$ il vettore verticale $(x_1, \ldots, x_n)^T$ delle variabili.
Lo sviluppo di Taylor del secondo ordine attorno a un punto $\boldsymbol{x}_0$ è dato dall'espressione

$$f(\boldsymbol{x}) \;=\; f(\boldsymbol{x}_0) \;+\; \nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \;+\; \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T \mathbf{H}_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \;+\; O(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3)$$

in cui $\nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x})$ è il *gradiente* di $f(\boldsymbol{x})$

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}) \;=\; D_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}) \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

e $\mathbf{H}_f(\boldsymbol{x})$ è la matrice Hessiana di $f(\boldsymbol{x})$

$$\mathbf{H}_f(\boldsymbol{x}) \;=\; D^2_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}) \;=\; \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1}^n \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Definiamo punto di stazionarietà di $f(\boldsymbol{x})$ un punto $\boldsymbol{x}_0$ che soddisfi l'equazione

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}_0) \;=\; \mathbf{0} \quad \text{(vettore di tutti 0)}$$

Condizione *necessaria* affinché $f(\boldsymbol{x})$ assuma un valore estremo locale in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ (*interno* al dominio di definizione di $f(\boldsymbol{x})$) è che $\boldsymbol{x}_0$ sia un *punto di stazionarietà* di $f(\boldsymbol{x})$.
Infatti, supponiamo che che $\boldsymbol{v}_0 = \nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}_0)^T \neq \mathbf{0}$. Allora, dallo sviluppo in serie di Taylor del primo ordine

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \varepsilon \boldsymbol{v}_0) \;=\; f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{v}_0^T \varepsilon \boldsymbol{v}_0 + O(\varepsilon^2) \;=\; f(\boldsymbol{x}_0) + \varepsilon |\boldsymbol{v}_0|^2 + O(\varepsilon^2)$$

si vede che $f(\boldsymbol{x}_0 + \varepsilon \boldsymbol{v}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)$ cambia di segno con ε in un intorno sufficientemente piccolo di $\boldsymbol{x}_0$ lungo la direzione di $\boldsymbol{v}_0$, per cui $f(\boldsymbol{x}_0)$ non può essere un valore estremo di $f(\boldsymbol{x})$.

La condizione sul gradiente non è sufficiente per dire se il punto di stazionarietà trovato è un massimo, un minimo o un punto di sella. Occorre ricorrere alle derivate del secondo ordine.
Infatti, dallo sviluppo di Taylor del secondo ordine intorno a un punto di stazionarietà

$$f(\boldsymbol{x}) \;=\; f(\boldsymbol{x}_0) \;+\; \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T \mathbf{H}_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \;+\; O(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3)$$

è evidente che $f(\boldsymbol{x}_0)$ è un massimo (risp. minimo) locale se e solo se $\boldsymbol{u}^T \mathbf{H}_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{u}$ assume soltanto valori negativi (risp. positivi).

Pertanto, dato $\boldsymbol{x}_0$ tale che $\nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$, si hanno le seguenti condizioni sufficienti per la sua classificazione basate sulla segnatura di $\mathbf{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$:

- Se $\mathbf{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ è definita (strettamente) **positiva** si ha un **minimo locale**.
- Se $\mathbf{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$ è definita (strettamente) **negativa** si ha un **massimo locale**.
- Altrimenti, si ha un **punto di sella**.

Richiami sulle forme quadratiche reali

Data una matrice reale e simmetrica $\mathbf{H}$ di ordine n, la forma quadratica associata ad essa è data dalla seguente espressione:

$$\boldsymbol{u}^T \mathbf{H} \boldsymbol{u} \quad \text{dove } \boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in R^n \ .$$

La matrice H è definita (strettamente) positiva (risp. negativa) se la forma quadratica ad essa associata è sempre positiva (risp. negativa) per ogni vettore reale non nullo $\boldsymbol{u}$, ovvero

$$\boldsymbol{u}^T \mathbf{H} \boldsymbol{u} > 0 \quad (\text{risp. } < 0) \quad \forall \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0} \ .$$

In caso contrario la segnatura della matrice è indefinita.

Esistono almeno due criteri per determinare la segnatura di una matrice reale simmetrica.

1. Si calcolano gli autovalori della matrice: se sono tutti positivi (risp. negativi) la matrice è definita positiva (risp. negativa), altrimenti è indefinita.
2. Si calcolano i determinanti delle sottomatrici $\mathbf{H}_m$ ottenute prendendo le prime m righe e colonne di $\mathbf{H}$. Se sono tutti positivi (risp. alternativamente negativi e positivi con il primo determinante negativo)

   $$\det[\mathbf{H}_1] > 0, \det[\mathbf{H}_2] > 0, \ldots \quad (\text{risp. } \det[\mathbf{H}_1] < 0, \det[\mathbf{H}_2] > 0, \det[\mathbf{H}_3] < 0, \ldots)$$

   la matrice è definita positiva (risp. negativa), altrimenti è indefinita (criterio di Sylvester).

   Si osservi che questo criterio *non richiede il calcolo esplicito degli autovalori.*

Si definisce *segnatura* di una matrice reale simmetrica la differenza tra il numero di autovalori positivi e il numero di autovalori negativi. Si definisce *indice* di una matrice reale simmetrica il numero di autovalori negativi.

Calcolo dei valori estremi di una funzione in presenza di vincoli

Consideriamo il problema della ricerca dei valori estremi di una funzione

$$f(\boldsymbol{x}) \ = \ f(x_1, \ldots, x_n)$$

continua insieme alle sue derivate parziali rispetto a tutte le variabili almeno fino al secondo ordine, soggetta a k ($< n$) equazioni di vincolo

$$g_i(\boldsymbol{x}) \;=\; 0,\;\; i=1,\ldots,k\;.$$

La presenza di questi vincoli equivale a restringere il dominio su cui si cerca il valore estremo di $f(\boldsymbol{x})$ a

$$\Sigma_{\mathbf{x}} \;=\; \{\boldsymbol{x}:\; g_i(\boldsymbol{x})=0,\, i=1,\ldots,k\} \;=\; \{\boldsymbol{x}:\; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$$

dove le funzioni $g_i(\boldsymbol{x})$ sono continue con le loro derivate parziali almeno fino al secondo ordine e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(g_1(\boldsymbol{x}),\cdots,g_k(\boldsymbol{x}))$.

Esempio se $f(\boldsymbol{x}) = f(x,y,z)$ è una funzione sullo spazio euclideo a 3 dimensioni e si ha il vincolo $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$, la ricerca di valori estremi di $f(\boldsymbol{x})$ è ristretta al dominio rappresentato dalla superficie di una sfera di raggio unitario con centro nell'origine.

Supponiamo, inoltre, che le funzioni $g_i(\boldsymbol{x})$ siano indipendenti tra loro nel senso che non si possa escludere nessuna delle equazioni $g_i(\boldsymbol{x})=0$ senza ampliare il dominio $\Sigma_{\mathbf{x}}$.

Di conseguenza, dal teorema della funzione implicita (Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley: 1957), $\Sigma_{\mathbf{x}}$ è un dominio a $n-k$ dimensioni in R^n, lo spazio euclideo a n dimensioni; preso un punto qualsiasi $\boldsymbol{x}_0 \in \Sigma_{\mathbf{x}}$, esiste un unico insieme di funzioni $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})$ tale che

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}\in\mathcal{D}_{\mathbf{u}}\} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_0)$$

dove $\boldsymbol{u}$ è un vettore reale a $n-k$ componenti e $\mathcal{D}_{\mathbf{u}}$ un opportuno dominio a $n-k$ dimensioni in R^{n-k}.

Lo stesso teorema dimostra che l'indipendenza delle funzioni $g_i(\boldsymbol{x})$ implica l'indipendenza lineare dei gradienti $\nabla_{\mathbf{x}} g_i(\boldsymbol{x})$ per ogni $\boldsymbol{x}\in\Sigma_{\mathbf{x}}$.

Pertanto, il problema di ricerca di un estremo vincolato si riconduce alla ricerca di un valore estremo (non vincolato) di

$$\bar{f}(\boldsymbol{u}) \;=\; f(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})) \;=\; f\left(h_1(u_1,\ldots,u_{n-k}),\cdots,h_n(u_1,\ldots,u_{n-k})\right)$$

ovvero alla soluzione del sistema di equazioni

$$\nabla_{\mathbf{u}}\bar{f}(\boldsymbol{u}) \;=\; \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u_1},\frac{\partial \bar{f}}{\partial u_2},\ldots\frac{\partial \bar{f}}{\partial u_{n-k}}\right) \;=\; 0$$

che fornisce i punti di stazionarietà e allo studio della segnatura della matrice Hessiana $\mathbf{H}_{\bar{f}}(\boldsymbol{u}_0)$ in uno dei punti di stazionarietà trovati, $\boldsymbol{u}_0$.

La difficoltà di questo approccio sta nella determinazione di $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})$, talvolta impossibile per via analitica; attraverso al metodo dei moltiplicatori di Lagrange è possibile superare questo ostacolo.

Applicando le regole di derivazione in catena, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial u_\ell} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial h_i}{\partial u_\ell}\;, \qquad \ell=1,2,\ldots,n-k$$

che in forma matriciale diventa

$$D_{\mathbf{u}} f(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})) \;=\; D_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})) D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})$$

dove

$$D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}) \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial u_{n-k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial h_n}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_n}{\partial u_{n-k}} \end{bmatrix}$$

Si osservi che la relazione precedente è un'estensione della nota regola di derivazione di funzione di funzione

$$\frac{d}{du}\, f[h(u)] \;=\; f'[h(u)]\; h'(u) \;.$$

Quindi, per un punto di stazionarietà $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_0)$, vale il sistema di equazioni

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial u_\ell}\right|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0} \;=\; 0, \;\; \ell = 1,2,\ldots,n-k$$

per cui $\nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}_0)$ appartiene allo spazio ortogonale a quello generato dai vettori colonna

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial u_\ell}\right|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0} \qquad \ell = 1,2,\ldots,n-k \;.$$

Applicando ancora le regole di derivazione in catena alle identità $g_i(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})) = 0$, si ottengono le equazioni

$$\nabla_{\mathbf{x}} g_i(\boldsymbol{x}_0) \cdot \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial u_\ell}\right|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0} \;=\; 0, \;\; i = 1,2,\ldots,k, \;\; \ell = 1,2,\ldots,n-k \;.$$

Pertanto, i vettori $\nabla_{\mathbf{x}} g_i(\boldsymbol{x}_0)$ appartengono allo stesso spazio a cui appartiene $\nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}_0)$ e ne sono una base (in quanto linearmente indipendenti e in numero pari alla dimensione dello spazio).

Questo implica che $\nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}_0)$ è linearmente dipendente dai vettori $\nabla_{\mathbf{x}} g_i(\boldsymbol{x}_0)$, da cui la relazione

$$\nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla_{\mathbf{x}} g_i(\boldsymbol{x}_0) \;=\; \mathbf{0}$$

in cui i termini λ_i sono parametri reali che prendono il nome di *moltiplicatori di Lagrange*.

Quindi, la determinazione dei punti di stazionarietà e dei moltiplicatori di Lagrange equivale a risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \nabla \varphi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\lambda}) & = \nabla f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T D_{\mathbf{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \;=\; 0 \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) & = \mathbf{0} \end{cases}$$

dove $\varphi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\lambda})$ è detta funzione lagrangiana e $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)^T$ è il vettore dei moltiplicatori di Lagrange. Supponiamo che la soluzione di questo sistema sia $(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{\lambda}_0)$.

Utilizzando ancora le regole di derivazione in catena si può determinare la matrice Hessiana $\mathbf{H}_{\bar{f}}(\boldsymbol{u}_0)$. Infatti, si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_\ell \partial u_m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 h_i}{\partial u_\ell \partial u_m} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial h_i}{\partial u_\ell} \frac{\partial h_j}{\partial u_m}$$

e quindi, in forma matriciale:

$$D^2_{\mathbf{u}} f(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})) = D_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x})[D^2_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})] + D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})^T [D^2_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x})] D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})$$

Applicando questa relazione alle identità $g_i(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})) = 0$, si ottiene

$$D_{\mathbf{x}} g_i(\boldsymbol{x})[D^2_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})] + D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})^T [D^2_{\mathbf{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}) = 0$$

da cui, combinando linearmente le equazioni con i coefficienti λ_i,

$$\begin{aligned} D^2_{\mathbf{u}} f(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})) &= \left[D_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_i D_{\mathbf{x}} g_i(\boldsymbol{x}) \right] D^2_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}) \\ &\quad + D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u})^T \left[D^2_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_i D^2_{\mathbf{x}} g_i(\boldsymbol{x}) \right] D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

Pondendo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_0)$ e $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$, il primo termine si annulla e l'espressione diventa

$$\mathbf{H}_{\bar{f}}(\boldsymbol{u}_0) = D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_0)^T \left[\mathbf{H}_\varphi(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) \right] D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_0)$$

Pertanto, poiché

$$\boldsymbol{u}^T \mathbf{H}_{\bar{f}}(\boldsymbol{u}_0) \boldsymbol{u} = (D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_0) \boldsymbol{u})^T \left[\mathbf{H}_\varphi(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) \right] (D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_0) \boldsymbol{u})$$

è sufficiente studiare il segno della forma quadratica in corrispondenza dei vettori $\boldsymbol{x} = D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_0) \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, ovvero appartenenti allo spazio delle colonne di $D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_0)$ e quindi ortogonali allo spazio delle righe di $D_{\mathbf{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$, ovvero dei gradienti $\nabla_{\mathbf{x}} g_i(\boldsymbol{x}_0)$.

I risultati finora ottenuti sono riassunti nel seguente teorema.

Teorema Assunte valide le ipotesi di continuità delle funzioni e delle loro derivate parziali fino almeno al secondo ordine, i punti stazionari di una funzione $f(\boldsymbol{x})$ soggetta ai vincoli $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} \nabla \varphi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\lambda}) & = \nabla f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T D_{\mathbf{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) & = \mathbf{0} \end{cases}$$

Dato un punto di stazionarietà $(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$, la sua classificazione richiede lo studio del segno della forma quadratica

$$\boldsymbol{x}^T \mathbf{H}_\varphi(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) \boldsymbol{x}$$

con il vincolo

$$D_{\mathbf{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) \boldsymbol{x} = 0 \,.$$

- □ Se è definita (strettamente) **positiva** si ha un **minimo locale**.
- □ Se è definita (strettamente) **negativa** si ha un **massimo locale**.

□ Altrimenti, si ha un **punto di sella**.

L'eliminazione del vincolo (sistema di equazioni lineari di rango k) riduce $\boldsymbol{x}^T \mathbf{H}_\varphi(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{x}$ ad una forma quadratica di ordine $n-k$ di cui si determina la segnatura.

Al fine di chiarire meglio il procedimento descritto consideriamo alcuni esempi.

Esempio 1 Si calcoli il volume massimo di un parallelepipedo di cui è nota la superficie laterale S.

Soluzione A (metodo dei moltiplicatori di Lagrange)

Detti x, y e z i lati del parallelepipedo, occorre risolvere il problema

$$\begin{cases} \max \quad xyz & \text{funzione da massimizzare} \\ xy + xz + yz - S/2 = 0 & \text{equazione di vincolo} \end{cases}$$

Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} yz + \lambda(y+z) = 0 \\ xz + \lambda(x+z) = 0 \\ xy + \lambda(x+y) = 0 \end{cases}$$

che ammette un'unica soluzione $x = y = z = -2\lambda$. Tale soluzione, sostituita nell'equazione di vincolo dà

$$12\lambda^2 = S/2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \pm\sqrt{S/24}\ .$$

Poiché assumiamo che la soluzione cercata (i lati del parallelepipedo) sia positiva, si ha $x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt{S/6}$,$\lambda_0 = -\sqrt{S/24}$.

Per verificare che si tratta effettivamente di un massimo, calcoliamo la matrice Hessiana nel punto stazionario $x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt{S/6}$:

$$\mathbf{H}_\varphi(\boldsymbol{x}_0; \lambda_0) = \left.\begin{bmatrix} 0 & z+\lambda & y+\lambda \\ z+\lambda & 0 & x+\lambda \\ y+\lambda & x+\lambda & 0 \end{bmatrix}\right|_{x=y=z=\sqrt{S/6},\lambda=-\sqrt{S/24}} = \sqrt{S/24}\cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi calcoliamo il gradiente dell'equazione di vincolo per $x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt{S/6}$:

$$\nabla(xy + xz + yz - S/2)\big|_{x=y=z=\sqrt{S/6}} = \sqrt{2S/3}\ (1,1,1)$$

Pertanto, essendo S positivo, occorre studiare il segno della forma quadratica $u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3$ (ottenuta dalla matrice Hessiana) quando $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ (ottenuta dal vincolo). Ricavando u_3 dall'equazione del vincolo, si ottiene $u_3 = -u_1 - u_2$ che, sostituito nella forma quadratica precedente dà

$$-u_1^2 - u_1u_2 - u_2^2$$

che è definita negativa poiché la matrice $\begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix}$ ha autovalori negativi ($-1/2$, $-3/2$). Questo dimostra che il punto trovato è un massimo.

Soluzione B (esplicitazione del vincolo)
In questo esempio è possible esplicitare il vincolo del problema, ottenendo:

$$\begin{cases} x &= h_1(u,v) &= u \\ y &= h_2(u,v) &= v \\ z &= h_3(u,v) &= \dfrac{S/2 - uv}{u+v} \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\bar{f}(u,v) \; = \; f(\boldsymbol{h}(u,v)) \; = \; uv\frac{S/2 - uv}{u+v} \; .$$

La ricerca dei punti di stazionarietà conduce al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial u} &= -\dfrac{(u^2 + 2uv - S/2)v^2}{(u+v)^2} &= 0 \\ \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial v} &= -\dfrac{(v^2 + 2uv - S/2)v^2}{(u+v)^2} &= 0 \end{cases}$$

la cui soluzione (non banale e positiva) è

$$u \; = \; v \; = \; \sqrt{S/6} \quad \Longrightarrow \quad x \; = \; y \; = \; z \; = \; \sqrt{S/6}$$

La matrice Hessiana di $\bar{f}(\boldsymbol{u})$ calcolata nel punto di stazionarietà è

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\bar{f}}(\boldsymbol{u}_0) \; &= \; \frac{1}{(u+v)^3} \left[\begin{array}{cc} -v^2(2u^2+S) & uv[S - 2(u^2 + 3uv + v^2)] \\ uv[S - 2(u^2 + 3uv + v^2)] & -u^2(2v^2+S) \end{array} \right]_{u=v=\sqrt{S/6}} \\ &= \; -\sqrt{\frac{S}{24}} \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

che è definita negativa (criterio di Sylvester) in quanto

$$\det[\mathbf{H}_1] \; = \; -\sqrt{\frac{S}{6}} \quad \text{e} \quad \det[\mathbf{H}_2] \; = \; \frac{S}{8}$$

per cui si tratta di un massimo.
E' diretto verificare che la soluzione trovata coincide con quella ottenuta con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esempio 2 Si trovi il valore estremo della funzione $x + y$ con il vincolo $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1 = 0$ (per $x,y > 0$).

Soluzione
Si considera la funzione lagrangiana

$$\varphi(\boldsymbol{x},\lambda) \; = \; x + y + \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1 \right)$$

da cui si ricava il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda}{x^2} & = 0 \\ 1 - \dfrac{\lambda}{y^2} & = 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} & = 1 \end{cases}$$

Quindi si ottiene il punto di stazionarietà

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 2, \quad \lambda_0 = 4\ .$$

La matrice Hessiana H_φ è

$$H_\varphi(x_0,y_0;\lambda_0) \;=\; \begin{bmatrix} 2\lambda_0/x_0^3 & 0 \\ 0 & 2\lambda_0/y_0^3 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

corrispondente alla forma quadratica $u^2 + v^2$ definita positiva, da cui il punto di stazionarietà trovato è un minimo.

In questo caso non è stato necessario restringere lo studio della forma quadratica allo spazio determinato dall'equazione

$$\frac{2\lambda_0}{x_0^3}u + \frac{2\lambda_0}{y_0^3}v \;=\; u + v \;=\; 0$$

poiché la matrice Hessiana era già definita positiva. Questa restrizione avrebbe condotto a considerare la forma quadratica $u^2 + (-u)^2 = 2u^2$ evidentemente definita positiva.

Esempio 3 Si determini un valore estremo della funzione $x_1 x_2 \cdots x_n$ per valori positivi delle variabili sotto il vincolo $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$, sapendo che g è una funzione simmetrica delle variabili.

Soluzione

La funzione lagrangiana del problema è

$$\varphi(\boldsymbol{x};\lambda) \;=\; x_1 x_2 \cdots x_n + \lambda g(\boldsymbol{x})$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$; quindi, occorre annullare l'equazione al gradiente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \;=\; \prod_{j \neq i} x_j + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} \;=\; 0\ .$$

Essendo $g(\boldsymbol{x})$ simmetrica nelle variabili, la sua derivata parziale rispetto a x_i è ancora una funzione simmetrica delle variabili diverse da x_i. Questo implica che il suo valore non dipende da i in corrispondenza di un punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_0,\ldots,x_0)$, dove x_0 si ricava dall'equazione

$$g(x_0,x_0,\ldots,x_0) \;=\; 0\ .$$

Pertanto, una soluzione dell'equazione al gradiente è

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 = (x_0,x_0,\ldots,x_0) \qquad \lambda = \lambda_0 = -\frac{x_0^{n-1}}{\left.\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}}$$

La classificazione del punto di stazionarietà trovato richiede lo studio della matrice Hessiana di $\varphi(\boldsymbol{x};\lambda)$ in corrispondenza del punto stesso e sotto il vincolo dell'equazione $\nabla g(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x} = 0$. Osserviamo che, a causa della simmetria, le derivate parziali del secondo ordine rispetto a φ prendono soltanto due valori:

$$a = \lambda_0 \left.\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \qquad b = x_0^{n-2} + \lambda_0 \left.\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$$

e quindi la matrice è

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

corrispondente alla forma quadratica

$$(a-b)(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2) \; + \; b(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^2$$

Poiché il valore del gradiente in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ è multiplo del vettore $(1,1,\ldots,1)$ si ha l'equazione di vincolo $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0$ e quindi la classificazione del punto di stazionarietà dipende dal segno della forma quadratica

$$(a-b)(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2) \; .$$

Pertanto si ha un massimo o un minimo a seconda che sia $a-b<0$ o $a-b>0$. Inserendo i valori trovati di a e b si ottiene

$$\frac{x_0}{\left.\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 1 \implies \begin{matrix} \text{massimo} \\ \text{minimo} \end{matrix}$$

Come ulteriore esercizio, si provi ad estendere questo risultato alla massimizzazione di una funzione simmetrica $f(\boldsymbol{x})$ sotto il vincolo simmetrico $g(\boldsymbol{x}) = 0$.

Cenni di calcolo delle variazioni

Il calcolo delle variazioni studia il comportamento dei funzionali, ovvero delle funzioni di funzioni.

Definizione Un *funzionale* è una applicazione da uno spazio di funzioni $\mathcal{H}[t]$ dotato di norma sull'insieme dei numeri reali.

Esempi di funzionali di $h(t)$:

1. $F[h] = h(t_0)$
2. $F[h] = G(h(t_0))$
3. $F[h] = \int_a^b h(t)dt$
4. $F[h] = \int_a^b G(t,h(t))dt$
5. $F[h] = \int_a^b G(t,h(t),h'(t))dt$

Consideriamo l'effetto di una variazione infinitesima di $h(t)$ su $F[h]$ studiando la funzione

$$\varphi(\varepsilon) = F[h(t) + \varepsilon\psi(t)] ,$$

in cui $\psi(t)$ è una funzione prefissata in $\mathcal{H}[t]$. Dall'analisi matematica, $\varphi(\varepsilon)$ ha un punto di stazionarietà in $\varepsilon = 0$ se $\varphi'(0) = 0$ (le derivate sono prese rispetto ad ε, assumendo ψ fissa).

Pertanto, la ricerca dei punti di stazionarietà (massimi, minimi o punti di sella) procede, analogamente al caso delle funzioni ordinarie, attraverso l'annullamento del differenziale di Frechet (variazione del funzionale) definito come

$$\delta F[h] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F[h+\varepsilon\psi] - F[h]}{\varepsilon} = \left.\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 .$$

Questa condizione introduce $\psi(t)$, variazione dell'argomento del funzionale e l'annullamento di $\delta F[h]$ deve verificarsi per ogni possibile scelta di $\psi(t)$.

Il riconoscimento del punto di stazionarietà trovato procede attraverso lo studio della derivata seconda di $\varphi(\varepsilon)$. In questo caso, si definisce

$$\delta^2 F[h] = \left.\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}$$

e si considera il segno di questo differenziale in corrispondenza del punto di stazionarietà. Se $\delta F[h_0] = 0$, allora

- □ Si ha un **massimo** se $\delta^2 F[h_0] < 0 \ \ \forall\psi(t)$.
- □ Si ha un **minimo** se $\delta^2 F[h_0] > 0 \ \ \forall\psi(t)$.
- □ Altrimenti, si ha un **punto di sella**.

Applichiamo quanto detto al funzionale $F[h] = \int_a^b G(h(t))dt$ (generalmente, G dipende anche da t ma questa dipendenza è stata omessa per semplicità di notazione). Derivando sotto il segno di integrale, si ottiene:

$$\delta F[h] = \varphi'(0) = \int_a^b G'(h(t))\ \psi(t)\ dt .$$

Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente per l'annullamento della variazione $\delta F[h]$ è

$$G'(h(t)) = 0 \qquad \forall t \in [a,b] ,$$

tranne che, eventualmente, su un insieme di valori a misura nulla.

Quindi si considera il differenziale del secondo ordine

$$\delta^2 F[h] \;=\; \varphi''(0) \;=\; \int_a^b G''(h(t))\;\psi(t)^2\;dt\;.$$

Il segno di questo differenziale è determinato dal segno di $G''(h(t))$. Dato un punto di stazionarietà $h_0(t)$, ovvero tale che $G'(h_0(t)) = 0\ \forall t \in [a,b]$.

- □ Si ha un **massimo** se $G''(h_0(t)) \leq 0\ \ \forall t \in [a,b]$.
- □ Si ha un **minimo** se $G''(h_0(t)) \geq 0\ \ \forall t \in [a,b]$.
- □ Altrimenti, si ha un **punto di sella**.

Le prime due condizioni vanno verificate ovunque su $[a,b]$ tranne che, eventualmente, su un insieme di valori a misura nulla.
Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è possibile risolvere il problema della ricerca dei valori estremi di un funzionale soggetto a una o più equazioni funzionali di vincolo, ovvero

$$\begin{cases} F[h] & \text{funzionale obbiettivo} \\ \Phi_i[h] = 0,\ i = 1,2,\ldots,k & \text{equazioni funzionali di vincolo} \end{cases}$$

La ricerca dei punti di stazionarietà conduce al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \delta F[h] + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta\Phi_i[h] \;=\; \delta F[h] + \boldsymbol{\lambda}^T \delta\boldsymbol{\Phi}[h] & = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Phi}[h] & = \mathbf{0} \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{\Phi}[h] = (\Phi_1[h],\ldots,\Phi_k[h])^T$ e $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)^T$.
Una soluzione del sistema di equazioni precedente è un punto di stazionarietà del problema, $(h_0(t),\boldsymbol{\lambda}_0)$.

- □ Si ha un **massimo** se $\delta^2 F[h_0] + \boldsymbol{\lambda}_0^T \delta^2\boldsymbol{\Phi}[h_0] < 0\ \ \forall\psi(t)$.
- □ Si ha un **minimo** se $\delta^2 F[h_0] + \boldsymbol{\lambda}_0^T \delta^2\boldsymbol{\Phi}[h_0] > 0\ \ \forall\psi(t)$.
- □ Altrimenti, si ha un **punto di sella**.

Considerando il caso $\Phi_i[h] = \int_a^b G_i(h(t))dt$, si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} G'(h(t)) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i G_i(h(t)) \;=\; 0 & \\ \int_a^b G_i(h(t))dt \;=\; 0 & i = 1,2,\ldots,k \end{cases}$$

che, eliminata la dipendenza dai moltiplicatori di Lagrange, fornisce punti di stazionarietà del tipo $(h_0(t),\boldsymbol{\lambda}_0)$.

- □ Si ha un **massimo** se $G''(h_0(t)) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(0)} G_i''(h_0(t)) < 0\ \ \forall t \in [a,b]$.

- □ Si ha un **minimo** se $G''(h_0(t)) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(0)} G_i''(h_0(t)) > 0 \quad \forall t \in [a,b]$.
- □ Altrimenti, si ha un **punto di sella**.

L'estensione al caso di funzionali e vincoli in più funzioni indipendenti segue direttamente dall'applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esempio Si determini il valore estremo del funzionale $\int_a^b A(t)h(t)dt$ soggetto al vincolo $\int_a^b B(t)/h(t)dt = 1$ dove $A(t),B(t) > 0 \forall t \in [a,b]$.

Soluzione
La funzione lagrangiana corrispondente a questo problema è

$$\varphi(\varepsilon) \;=\; \int_a^b A(t)[h(t) + \varepsilon\psi(t)]\; dt \;+\; \lambda \left\{ \int_a^b \frac{B(t)}{h(t) + \varepsilon\psi(t)}\; dt - 1 \right\}$$

I punti di stazionarietà si ottengono risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \varphi'(0) = \displaystyle\int_a^b \left[A(t) - \lambda \frac{B(t)}{h(t)^2} \right] \psi(t)dt & = 0 \\ \qquad\quad \displaystyle\int_a^b \frac{B(t)}{h(t)} dt & = 1 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$h_0(t) \;=\; \left[\int_a^b \sqrt{A(t)B(t)}dt \right] \sqrt{B(t)/A(t)} \qquad \lambda_0 \;=\; \left[\int_a^b \sqrt{A(t)B(t)}dt \right]^2$$

Inoltre, si ha

$$\varphi''(0) \;=\; 2\lambda_0 \int_a^b \frac{B(t)}{h_0(t)^3} (\psi(t))^2 dt \;>\; 0$$

da cui si verifica che il punto di stazionarietà trovato è un minimo.
Esempi di ricerca di valori estremi vincolati di funzionali si hanno negli esercizi 3.7, 8.1 e 8.4.

Soluzione esercizio 8.1

La velocità di trasmissione di 9600 bit/s richiede un intervallo di simbolo

$$T \;=\; \frac{1}{9600}\ \mathrm{s}\ .$$

Trattandosi di una modulazione PAM, la banda occupata è

$$B \;=\; \frac{1}{2T} \;=\; 4800\ \mathrm{Hz}\ .$$

Poiché il canale ha una banda disponibile superiore (6 kHz), possiamo utilizzarla imponendo che il sistema abbia una funzione di trasferimento complessiva a coseno rialzato $R_\alpha(f)$ (eliminando cosí l'interferenza intersimbolica) con il massimo valore del coefficiente di roll-off (α) al fine di rendere il sistema meno sensibile a errori sull'istante di campionamento. Quindi otteniamo

$$B\,(1+\alpha) \;=\; W \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \;=\; \frac{W}{B} - 1 \;=\; \frac{6000\ \mathrm{Hz}}{4800\ \mathrm{Hz}} \;-\; 1 \;=\; 0.25\ .$$

Per la scelta di $Q(f)$ l'istante ottimo di campionamento (ovvero quello per cui $|q(t_0)|$ è massima) è $t_0 = 0$. Il problema richiede di minimizzare la potenza trasmessa per una data probabilità di errore. Poiché la densità spettrale di potenza del segnale modulato è

$$G_x(f) \;=\; \frac{A^2}{T}|S(f)|^2$$

la potenza media trasmessa è data dall'espressione:

$$P_x \;=\; \frac{A^2}{T}\int_{-W}^{W} |S(f)|^2\, df\ .$$

In assenza di interferenza intersimbolica, la probabilità di errore è

$$P(e) \;=\; \frac{1}{2}\ \mathrm{Erfc}\left[\frac{Aq(t_0)}{\sqrt{2}\sigma_n}\right]\ ,$$

dove t_0 è l'istante di campionamento principale e σ_n la deviazione standard del rumore filtrato in ricezione. Quindi, essendo $Q(f)$ fissata, il vincolo sulla probabilità di errore si traduce in un vincolo su σ_n:

$$\sigma_n^2 \;=\; \int_{-W}^{W} G_w(f)\ |U(f)|^2\, df\ ,$$

dove $G_w(f)$ è la densità spettrale di potenza del rumore additivo. Pertanto, occorre minimizzare il funzionale

$$\frac{A^2}{T}\int_{-W}^{W} \frac{|Q(f)|^2}{|C(f)|^2\ |U(f)|^2}\, df$$

con il vincolo

$$\int_{-W}^{W} G_w(f)\ |U(f)|^2\, df \;-\; \sigma_n^2$$

rispetto a $|U(f)|^2$.

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si annulla la variazione del funzionale rispetto a $|U(f)|^2$ e si trova:

$$-\frac{A^2}{T}\ \frac{|Q(f)|^2}{|C(f)|^2\ |U(f)|^4}\ +\ \lambda\ G_w(f)\ =\ 0,$$

da cui

$$|U(f)|^2\ =\ \gamma'\ \frac{|Q(f)|}{|C(f)|\ G_w(f)^{1/2}}\ =\ \gamma\ R_\alpha(f)\ \ \text{(poiché } G_w(f) \text{ è costante)}$$

e

$$|S(f)|^2\ =\ \frac{|Q(f)|^2}{|C(f)|^2\ |U(f)|^2}\ =\ \frac{R_\alpha(f)^2}{\gamma\ R_\alpha(f)}\ =\ \frac{R_\alpha(f)}{\gamma}\ .$$

La verifica del fatto che si tratta effettivamente di un minimo si ha calcolando la derivata seconda della funziona integranda con il vincolo in corrispondenza del punto di stazionarietà trovato; in questo modo, si ottiene

$$2\frac{A^2}{T}\ \frac{|Q(f)|^2}{|C(f)|^2\ |U(f)|^6}\ >\ 0\ .$$

Poiché

$$\sigma_n^2\ =\ \int_{-W}^{W} G_w(f)\ |U(f)|^2\ df\ =\ \frac{N_0}{2}\int_{-W}^{W}\gamma\ R_\alpha(f)\ df\ =\ \frac{\gamma N_0}{2}$$

e

$$P_x = \frac{A^2}{T}\int_{-W}^{W}|S(f)|^2\ df = \frac{A^2}{T}\int_{-W}^{W}\frac{|Q(f)|^2}{|C(f)|^2\ |U(f)|^2}\ df = \frac{A^2}{T}\int_{-W}^{W}\frac{1}{\gamma}R_\alpha(f)\ df = \frac{A^2}{\gamma T}$$

la probabilità di errore (prendendo l'istante di campionamento ottimo $t_0 = 0$) diventa

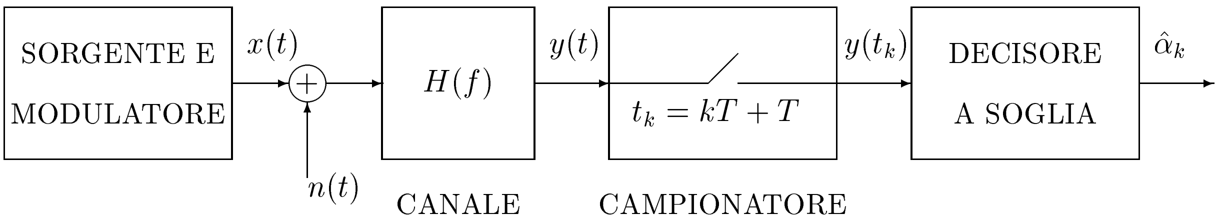
$$P(e)\ =\ \frac{1}{2}\ \text{Erfc}\left[\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right]\ =\ \frac{1}{2}\ \text{Erfc}\sqrt{\frac{P_x\cdot T}{N_0}}\ =\ 10^{-5}\ .$$

Utilizzando il diagramma dell'appendice A, si ottiene

$$\eta\ =\ \frac{P_x\cdot T}{N_0}\ =\ 10^{9.5/10}\ =\ 8.9\ \Longrightarrow\ P_x\ =\ \frac{N_0\cdot\eta}{T}\ =\ \frac{2\cdot 10^{-6}\ \text{W/Hz}\cdot 8.9}{(1/9600)\ \text{s}}\ =\ 0.17\ \text{W}\ .$$

Si osservi che *non è possibile, con i dati a disposizione, determinare la costante* γ.

Soluzione esercizio 8.2



1. Dall'espressione del segnale trasmesso

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k u_T(t-kT) \ , \qquad\qquad \alpha_k \in \{-1{,}1\}$$

si ottiene il segnale ricevuto

$$y(t) \ = \ [x(t)+n(t)] \ * \ h(t) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n q(t-nT) \ + \ n'(t) \ ,$$

dove $h(t)$ è la risposta all'impulso del canale

$$h(t) \ = \ \frac{1}{\tau} \ e^{-t/\tau} \ u(t) \ ,$$

$q(t)$ è il prodotto di convoluzione di $u_T(t)$ per $h(t)$:

$$q(t) \ = \ u_t(t) * h(t) \ = \ \int_0^T \frac{1}{\tau} \ e^{-(t-\theta)/\tau} \ u(t-\theta) \ d\theta \ = \ \begin{cases} 1-e^{-t/\tau} & 0 \le t \le T \\ (e^{T/\tau}-1)e^{-t/\tau} & t \ge T \end{cases}$$

e $n'(t)$ è il prodotto di convoluzione di $n(t)$ per $h(t)$ e quindi ancora un processo casuale gaussiano.

Si ha interferenza intersimbolica poiché la risposta all'impulso complessiva del sistema $q(t)$ non si annulla in corrispondenza degli istanti di campionamento $t_k = (k+1)T, k \neq 0$.

2. Il campione del segnale ricevuto può essere scomposto nelle sue tre componenti caratteristiche: campione utile, interferenza intersimbolica e rumore. Infatti, dall'espressione

$$\begin{aligned} y(t_k) \ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \ q(t_{k-n}) \ + \ n'(t_k) \ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \ q_{k-n} \ + \ n'_k \\ &= \alpha_k \ q_0 \ + \sum_{n=-\infty, n\neq k}^{\infty} \alpha_n \ q_{k-n} \ + \ n'_k \\ &= \alpha_k \ q_0 \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k-n} \ q_n \ + \ n'_k \end{aligned}$$

in cui $q_k = q(t_k)$ e $n'_k = n'(t_k)$ e si è tenuto conto che $q(t)$ è unilatera (in questo caso), si possono distinguere tre parti nel modo seguente:

$$\begin{cases} \alpha_k \ q_0 & \text{parte utile} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k-n} \ q_n & \text{interferenza intersimbolica} \\ n'_k & \text{rumore additivo} \end{cases}$$

La distorsione di picco è il rapporto tra il massimo valore assoluto dell'interferenza intersimbolica e il valore assoluto del campione utile, ovvero

$$d_P \;=\; \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |q_n|}{|q_0|} \;.$$

Poiché in questo caso si ha

$$q_k \;=\; (1-e^{-T/\tau})\; e^{-kT/\tau} \;, \qquad k = 0{,}1,\ldots$$

la distorsione di picco vale

$$d_P \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kT/\tau} \;=\; \frac{1}{e^{T/\tau}-1} \;.$$

3. Per il calcolo della probabilità di errore facciamo riferimento all'espressione del campione del segnale ricevuto

$$y(t_k) \;=\; \alpha_k\, q_0 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k-n}\, q_n \;+\; n'_k \;.$$

La probabilità di errore (condizionata ad aver trasmesso $\alpha_k = +1$ e una specifica sequenza modulante $\boldsymbol{a}_{k-1}(\alpha_n)_{n=-\infty}^{k-1}$) è

$$P(e|\boldsymbol{a}_{k-1}) = \text{Prob}\left\{ q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k-n}\, q_n + n'_k \;<\; 0 \right\} = \frac{1}{2}\,\text{Erfc}\left[\frac{q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k-n}\, q_n}{\sqrt{2}\sigma_{n'}} \right] .$$

Questa espressione va poi mediata rispetto alla sequenza modulante, tenendo conto del fatto che si considerano soltanto i primi due campioni interferenti:

$$\begin{aligned}
P(e) \;&=\; \frac{1}{2}\; E\left\{ \text{Erfc}\left[\frac{q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k-n}\, q_n}{\sqrt{2}\sigma_{n'}} \right] \right\} \\
&\cong\; \frac{1}{2}\; E\left\{ \text{Erfc}\left[\frac{q_0 + \alpha_{k-1} q_1 + \alpha_{k-2} q_2}{\sqrt{2}\sigma_{n'}} \right] \right\} \\
&=\; \frac{1}{8}\; \left\{ \text{Erfc}\left[\frac{q_0 + q_1 + q_2}{\sqrt{2}\sigma_{n'}} \right] + \text{Erfc}\left[\frac{q_0 + q_1 - q_2}{\sqrt{2}\sigma_{n'}} \right] \right. \\
&\qquad \left. +\;\; \text{Erfc}\left[\frac{q_0 - q_1 + q_2}{\sqrt{2}\sigma_{n'}} \right] + \text{Erfc}\left[\frac{q_0 - q_1 - q_2}{\sqrt{2}\sigma_{n'}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

A questo punto, occorre calcolare $\sigma_{n'}$:

$$\sigma_{n'}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_{n'}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\frac{1}{1+(2\pi f \tau)^2}df = \frac{N_0}{4\pi\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{N_0}{4\tau} \;,$$

da cui la banda equivalente di rumore del canale è $B_{\text{eq}} = \frac{1}{4\tau}$.

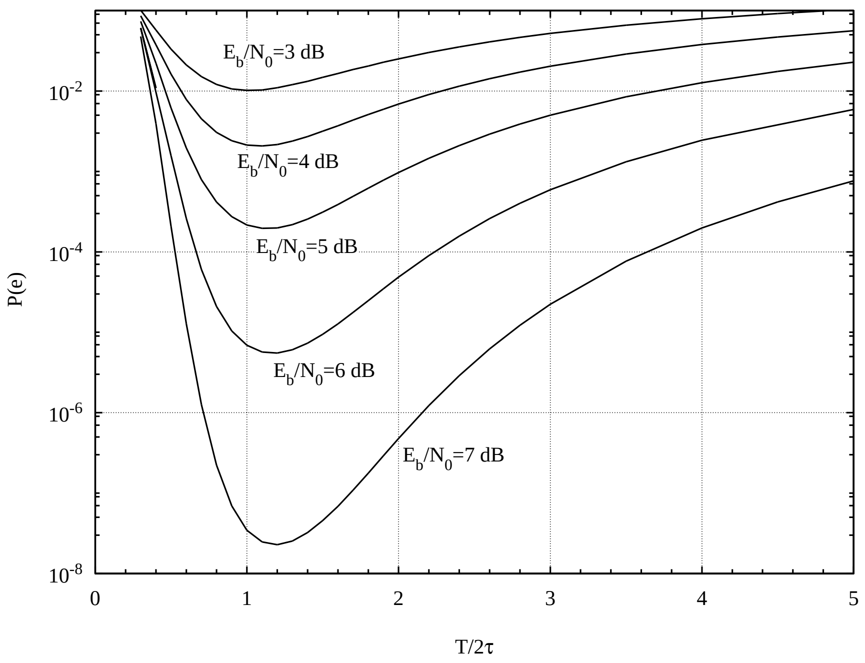
Poiché la potenza media del segnale trasmesso è $E[x(t)^2] = 1$, l'energia media per bit vale $E_b = T$. Pertanto possiamo scrivere la probabilità di errore nel modo seguente

$$\begin{aligned} P(e) \quad &\cong \quad \frac{1}{8}\left\{ \text{Erfc}\left[\gamma(q_0 + q_1 + q_2)\right] + \text{Erfc}\left[\gamma(q_0 + q_1 - q_2)\right] \right. \\ &\left. + \text{Erfc}\left[\gamma(q_0 - q_1 + q_2)\right] + \text{Erfc}\left[\gamma(q_0 - q_1 - q_2)\right] \right\} \end{aligned}$$

dove

$$\gamma = \sqrt{\frac{2\tau}{T}} \cdot \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} = \sqrt{\frac{1}{2TB_{\text{eq}}}} \cdot \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} = \sqrt{\frac{B_{\text{Nyquist}}}{B_{\text{eq}}}} \cdot \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \, .$$

La figura seguente riporta la probabilità di errore in funzione del rapporto E_b/N_0 e della banda equivalente di rumore normalizzata rispetto alla banda di Nyquist $\frac{1}{2T}$, ovvero $2B_{\text{eq}}T$:



Probabilità di errore in funzione della banda equivalente di rumore normalizzata rispetto alla banda di Nyquist.

Come si vede dalla figura, per ogni valore di E_b/N_0 esiste un valore di $2TB_{\text{eq}}$ che rende minima la probabilità di errore. Questo valore corrisponde ad una banda equivalente di rumore leggermente superiore alla banda di Nyquist $1/2T$.

L'esistenza di una larghezza di banda ottimale per il canale dipende dalla coesistenza di due fonti di disturbo:

- ☐ l'interferenza intersimbolica che diminuisce al crescere della banda;
- ☐ il rumore gaussiano additivo che cresce al crescere della banda.

La validità del risultato è parzialmente limitata dal fatto che si sono considerati solo due campioni interferenti. Possiamo supporre che il risultato sia valido se il terzo campione (trascurato) non supera il 5% del primo, ovvero se

$$e^{-2T/\tau} \leq 0.05 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{T}{2\tau} \geq -\frac{1}{4}\ln 0.05 = 0.75$$

Si osservi che i valori minimi delle curve riportate nel diagramma soddisfano questa condizione.

Soluzione esercizio 8.3

1. La risposta all'impulso complessiva del sistema si ottiene calcolando il prodotto di convoluzione $q(t) = s(t) * h(t)$. Il risultato ottenuto è il seguente:

$$q(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{t(2MT - t)}{2MT^2} & 0 \leq t \leq T \\ 1 - \dfrac{2t - T}{2MT} & T \leq t \leq MT \\ \dfrac{[(M+1)T - t]^2}{2MT^2} & MT \leq t \leq (M+1)T \\ 0 & t > (M+1)T \end{cases}$$

2. Calcolando il massimo di $|q(t)|$ sui tre intervalli in cui essa non è nulla, si trova il massimo assoluto in corrispondenza di $t = t_0 = T$ (istante di campionamento principale):

$$q_0 = q(T) = 1 - \frac{1}{2M} .$$

3. Similmente si ottiene

$$q_k = q((k+1)T) = 1 - \frac{2k+1}{2M} , \quad k = 1, \cdots, M-1$$

   e $q_M = q((M+1)T) = 0$, da cui si ha:

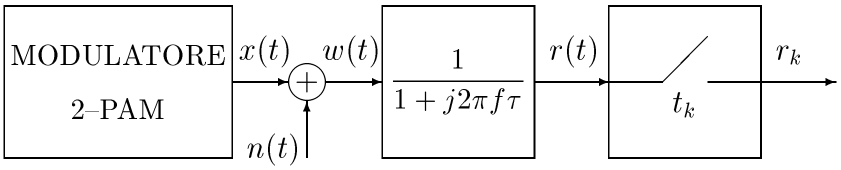
$$\sum_{k \neq 0} |q_k| = \sum_{k=1}^{M-1} \left(1 - \frac{2k+1}{2M}\right) = \frac{(M-1)^2}{2M} ,$$

   e quindi

$$D_p = \frac{(M-1)^2}{2M-1} .$$

4. Il diagramma ad occhio è aperto se vale la disequazione $D_p < 1$. Tale disequazione è soddisfatta per $2 - \sqrt{2} < M < 2 + \sqrt{2}$ e poiché M è un intero maggiore di 1, deve essere $M = 2$ o 3.

Soluzione esercizio 8.4



1. Il segnale utile dopo il filtro di ricezione è dato dall'espressione

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n q(t-nT)$$

dove

$$q(t) \;=\; s(t)*h(t) \;=\; \int_0^T \frac{1}{\tau}\, e^{-(t-\theta)/\tau}\, u(t-\theta)\, d\theta \;=\; \begin{cases} 1-e^{-t/\tau} & 0 \le t \le T \\ (e^{T/\tau}-1)e^{-t/\tau} & t \ge T \end{cases}$$

Pertanto, poiché le variabili casuali α_n sono statisticamente indipendenti e possono valere $\pm A$ con la stessa probabilità, lo spettro di potenza di $z(t)$ è $G_z(f) = \frac{A^2}{T}|Q(f)|^2$, e quindi la potenza del segnale ricevuto è

$$\begin{aligned} S \;&=\; \frac{A^2}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |Q(f)|^2 df = \frac{A^2}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |q(t)|^2 dt \\ &=\; \frac{A^2}{T}\left\{\int_0^T [1-e^{-t/\tau}]^2 dt + [e^{T/\tau}-1]^2 \int_T^{\infty} e^{-2t/\tau} dt\right\} \\ &=\; A^2\left[1-\frac{\tau}{T}(1-e^{-T/\tau})\right] \end{aligned}$$

La potenza del rumore si ottiene in modo analogo:

$$N \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\frac{1}{1+(2\pi f\tau)^2} df \;=\; \frac{N_0}{4\pi\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \;=\; \frac{N_0}{4\tau}\ .$$

Pertanto, il rapporto segnale/rumore in ricezione è

$$\frac{S}{N} \;=\; 4\frac{A^2\tau}{N_0}\left[1-(\tau/T)(1-e^{-T/\tau})\right]\ .$$

2. Dalla definizione di banda equivalente di rumore di un filtro si ha

$$B_{\mathrm{eq}} \;=\; \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df}{2\ \max_f |H(f)|^2} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{2\ (1+4\pi^2 f^2\tau^2)} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4\pi\tau\ (1+x^2)} \;=\; \frac{1}{4\tau}\ .$$

3. E' necessario scrivere i campioni del segnale ricevuto distinguendo la parte utile dal disturbo:

$$r_k = q_0\alpha_k + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \alpha_{k-n} + \nu_k$$

dove

$$q_k \;=\; q(t_k) \;=\; q_0\beta^k, \qquad\qquad q_0 \;=\; 1-e^{-T/\tau} \qquad \text{e} \qquad \beta \;=\; e^{-T/\tau}\;.$$

Il primo termine in r_k, $q_0\alpha_k$, rappresenta la parte utile, i termini successivi il disturbo. La varianza del disturbo è

$$\sigma_d^2 = E\left\{\left[\sum_{n=1}^{\infty} q_n\alpha_{k-n} + \nu_k\right]^2\right\} = A^2\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 + E[\nu_k^2]\;.$$

Utilizzando i risultati precedenti si ottiene

$$\sigma_d^2 = A^2 q_1^2 \sum_{n=0}^{\infty}\beta^{2n} + \frac{N_0}{4\tau} = A^2(1-\beta)^2\frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{N_0}{4\tau}$$

dove $\beta = e^{-T/\tau}$. In modo del tutto analogo si ottiene la varianza della parte utile dei campioni

$$\sigma_u^2 = A^2 q_0^2 = A^2(1-\beta)^2\;.$$

A questo punto studiamo il rapporto σ_d^2/σ_u^2:

$$\frac{\sigma_d^2}{\sigma_u^2} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{N_0}{4A^2\tau}\frac{1}{(1-\beta)^2}$$

La massimizzazione di σ_u^2/σ_d^2 può essere ottenuta cercando il minimo di $f(\beta) = \sigma_d^2/\sigma_u^2$ sull'intervallo (0,1) poiché β è una funzione monotona rispetto a T. Annullando la derivata si ha

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= 2\frac{\beta}{1-\beta^2} + 2\frac{\beta^3}{(1-\beta^2)^2} + \frac{N_0}{2A^2\tau}\frac{1}{(1-\beta)^3} \\ &= \frac{(4A^2\tau - N_0)\beta^2 - 2(2A^2\tau + N_0)\beta - N_0}{2A^2\tau(1-\beta^2)^2(1-\beta)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene l'equazione di secondo grado

$$(4A^2\tau - N_0)\beta^2 - 2(2A^2\tau + N_0)\beta - N_0 = 0$$

che ha una radice positiva e minore di 1 se $4A^2\tau - N_0 > 0$ (altrimenti ne ha due negative, che non danno soluzioni in T). Pertanto, se $A^2 > \frac{N_0}{4\tau} = N$, si ha la soluzione

$$\beta = \frac{A^2 + 2N + A\sqrt{A^2 + 8N}}{2(A^2 - N)}$$

e quindi

$$T = \tau \ln\left[\frac{2(A^2 - N_0/4\tau)}{A^2 + N_0/2\tau + A\sqrt{A^2 + 2N_0/\tau}}\right]$$

Se invece $A^2 \leq N$, poiché

$$f(0) = \frac{N_0}{4A^2\tau} \qquad \text{e} \qquad f(1^-) \to +\infty$$

il valore minimo si ha per $\beta = 0$, ovvero per $T \to \infty$.
Il fatto che $f(\beta)$ abbia effettivamente un minimo discende dalle seguenti osservazioni:

- ☐ $f'(\beta)$ non si annulla altrove per T reale e positivo.
- ☐ Per $T \to 0^+$, $\beta \to 1^-$ e quindi $f(1^-) \to +\infty$.
- ☐ Per $T \to +\infty$, $\beta \to 0^+$ e quindi $f(0) \to \frac{N_0}{4A^2\tau}$.

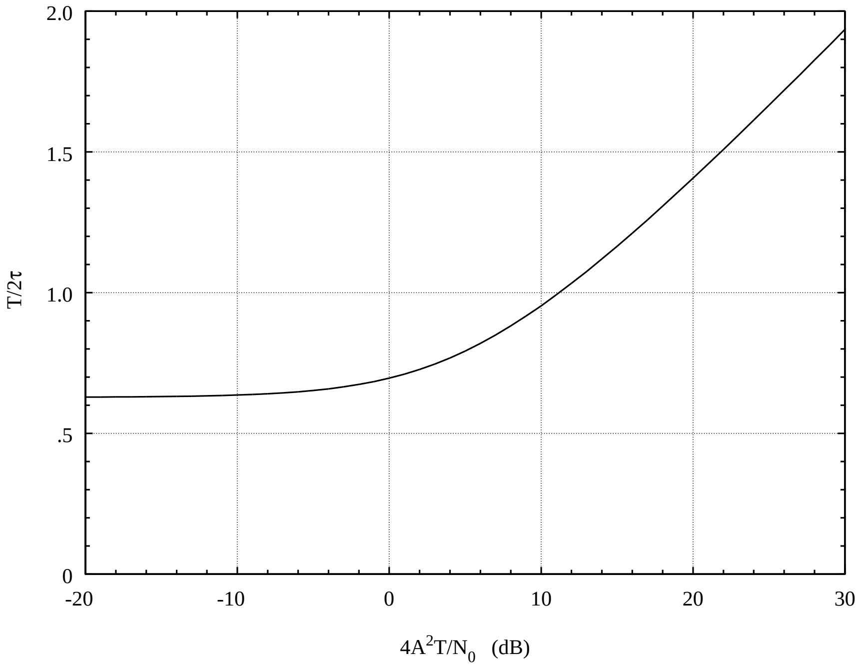
4. In questo caso occorre minimizzare il rapporto σ_d^2/σ_u^2 rispetto a τ invece che rispetto a T. Ponendo $\eta = 4A^2T/N_0$ e $x = \tau/T$, si ottiene

$$f(\beta) = \frac{\sigma_d^2}{\sigma_u^2} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} - \frac{\ln\beta}{\eta(1-\beta)^2}$$

La ricerca del valore minimo richiede l'annullamento della derivata prima:

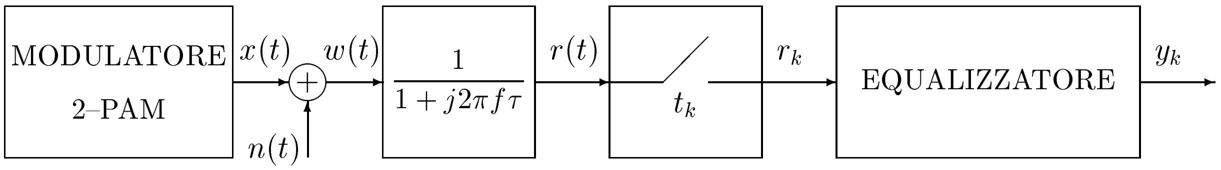
$$\begin{aligned} f'(\beta) &= 2\frac{\beta}{1-\beta^2} + 2\frac{\beta^3}{(1-\beta^2)^2} - \frac{1}{\eta\beta(1-\beta)^2} - 2\frac{\ln\beta}{\eta(1-\beta)^3} \\ &= \frac{(1+\beta)^2(1-\beta) + 2\eta\beta^2(1-\beta) - 2\beta(1+\beta)^2\ln\beta}{\eta\beta(1+\beta)^2(1-\beta)^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Poiché si tratta di un'equazione trascendente, occorre risolverla numericamente. La figura seguente riporta il diagramma del valore ottimo di $B_{\text{eq}}/B_{\text{Nyquist}} = T/2\tau$ in funzione di $\eta = 4A^2T/N_0$, espresso in dB.



Valore ottimo della banda equivalente di rumore del filtro normalizzata rispetto alla banda di Nyquist in funzione di $\eta = 4A^2T/N_0$.

Soluzione esercizio 8.5



Il segnale in ingresso al filtro di ricezione è

$$w(t) = x(t) + n(t)$$

per cui, definendo $h(t)$ la risposta all'impulso del filtro di ricezione, il segnale ricevuto risulta

$$r(t) = w(t) * h(t) = z(t) + \nu(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n q(t - nT) + \nu(t)$$

dove $\nu(t) = n(t) * h(t)$ e $q(t)$, segnale base all'uscita del filtro di ricezione, è dato dall'espressione

$$q(t) \; = \; s(t) * h(t) \; = \; \int_0^T \frac{1}{\tau}\, e^{-(t-\theta)/\tau}\; u(t-\theta)\; d\theta \; = \; \begin{cases} 1 - e^{-t/\tau} & 0 \le t \le T \\ \\ (e^{T/\tau} - 1)e^{-t/\tau} & t \ge T \end{cases}$$

Da questa si ottiene

$$q_k \; = \; q(t_k) \; = \; q_0 \beta^k \quad ,k \ge 0 \qquad \text{dove} \qquad q_0 \; = \; 1 - \beta \qquad \text{e} \qquad \beta \; = \; e^{-T/\tau} \; .$$

1. La varianza delle componenti di rumore nei campioni del segnale ricevuto è data della potenza del rumore filtrato da $H(f)$, ovvero

$$\sigma_n^2 \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \frac{1}{1 + (2\pi f \tau)^2} df \; = \; \frac{N_0}{4\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx \; = \; \frac{N_0}{4\tau} \; .$$

2. I campioni dopo l'equalizzatore sono

$$\begin{aligned} y_k \; &= \; r_k + a_1 r_{k-1} + a_2 r_{k-2} \\ &= \; \sum_{n=0}^{\infty} q_n \alpha_{k-n} + \nu_k + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} q_n \alpha_{k-1-n} + a_1 \nu_{k-1} + a_2 \sum_{n=0}^{\infty} q_n \alpha_{k-2-n} + a_2 \nu_{k-2} \end{aligned}$$

Pertanto la componente utile è

$$q_0 \alpha_k \; ,$$

l'interferenza intersimbolica è data dai termini

$$(q_1 + a_1 q_0)\alpha_{k-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (q_n + a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2})\alpha_{k-n}$$

e il rumore è

$$\nu_k + a_1 \nu_{k-1} + a_2 \nu_{k-2} \; .$$

3. Se si vuole annullare l'interferenza intersimbolica dopo l'equalizzatore, occorre risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} q_1 + a_1 q_0 & = 0 \\ q_n + a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2} & = 0 \ \text{ per } n = 2{,}3,\dots \end{cases}$$

Osservando che $q_n/q_{n-1} = \beta$, costante $\forall n > 0$, si ottiene

$$\begin{cases} \beta + a_1 & = 0 \\ \beta^2 + \beta a_1 + a_2 & = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $a_1 = -\beta$, $a_2 = 0$, per cui un equalizzatore lineare del primo ordine è sufficiente ad annullare l'interferenza intersimbolica.

Per calcolare la varianza del disturbo occorre determinare la covarianza dei campioni di rumore che non sono più indipendenti. Infatti, poiché

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} n(\theta) h(t_k - \theta) d\theta$$

e la funzione di autocorrelazione di $n(t)$ è $\frac{N_0}{2}\delta(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned} E[\nu_k \nu_{k-m}] &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) h(\theta - mT) d\theta \\ &= \frac{N_0}{2\tau^2} \int_{mT}^{\infty} e^{-(2\theta - mT)/\tau}\, d\theta \\ &= \frac{N_0}{4\tau} e^{-mT/\tau} \\ &= \frac{N_0}{4\tau} \beta^m . \end{aligned}$$

La varianza del disturbo è

$$\sigma_d^2 = E[(\nu_k - \beta\nu_{k-1})^2] = \frac{N_0}{4\tau}(1 - 2\beta^2 + \beta^2) = \frac{N_0}{4\tau}(1-\beta^2)$$

e quindi il rapporto segnale/rumore è dato da

$$\eta = \frac{q_0^2 A^2}{\frac{N_0}{4\tau}(1-\beta^2)} = \frac{\eta_0}{1-\beta^2}$$

dove η_0 è il rapporto segnale/rumore in assenza dell'equalizzatore.

4. In questo caso, la varianza complessiva del disturbo è

$$\begin{aligned} \sigma_d^2 = {} & q_0^2 A^2 \left[(\beta + a_1)^2 + (\beta^2 + a_1\beta + a_2)^2 \frac{1}{1-\beta^2} \right] \\ & + \frac{N_0}{4\tau}[1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1\beta + 2a_1 a_2 \beta + 2a_2\beta^2] \end{aligned}$$

avendo usato la relazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \ .$$

Per rendere minima σ_d^2 occorre annullare le derivate parziali rispetto ad a_1 e a_2. Il risultato che si ottiene corrisponde sicuramente a un minimo poiché l'espressione è una forma quadratica definita positiva. Derivando si ottiene il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a_1}\sigma_d^2 = q_0^2 A^2 \left[2(\beta + a_1) + 2\ \dfrac{(\beta^2 + a_1\beta + a_2)\beta}{1-\beta^2}\right] + \dfrac{N_0}{4\tau} 2(a_1 + \beta + a_2\beta) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial a_2}\sigma_d^2 = 2\dfrac{q_0^2 A^2 (\beta^2 + a_1\beta + a_2)}{1-\beta^2} + \dfrac{N_0}{4\tau} 2(a_2 + a_1\beta + \beta^2) = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è ancora $a_1 = -\beta$, $a_2 = 0$. Pertanto, il rapporto segnale/disturbo è ancora

$$\eta \ = \ \frac{q_0^2 A^2}{\dfrac{N_0}{4\tau}(1-\beta^2)} \ = \ \frac{\eta_0}{1-\beta^2}$$

Soluzione esercizio 8.6

1. Dalla definizione di banda equivalente di rumore di un filtro si ha

$$B_{\text{eq}} \ = \ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |Q(f)|^2 \ df}{2 \ \max_f |Q(f)|^2} \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{2\ (1 + 4\pi^2 f^2 \alpha^2 T^2)^2} \ = \ \frac{1}{8\alpha T} \ .$$

2. Antitrasformando la $Q(f)$ si ottiene

$$q(t) \ = \ \frac{t}{\alpha T} \ e^{-t/(\alpha T)} \ u(t) \ .$$

Poiché $q(t) = |q(t)|$, annullando la derivata di $q(t)$ si ottiene

$$\begin{cases} q'(t) \ = \ \dfrac{1}{\alpha T} \ \left(1 - \dfrac{t}{\alpha T}\right) \ e^{-t/(\alpha T)} \\ q'(t) \ = \ 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad t_0 \ = \ \alpha T \ .$$

Pertanto la distorsione di picco è

$$d_p \ = \ \frac{\sum_{k\neq 0} |q(t_k)|}{|q(t_0)|} \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{\alpha}\right) \ e^{-k/\alpha} \ = \ \frac{1}{e^{1/\alpha} - 1} \ + \ \frac{e^{1/\alpha}}{\alpha \ (e^{1/\alpha} - 1)^2} \ .$$

3. Il valore di α che rende $B_{\text{eq}} = \frac{1}{2T}$ è $\alpha = \frac{1}{4}$, da cui, sostituendo nella formula del punto precedente, si ha

$$d_p \ = \ \frac{5e^4 - 1}{(e^4 - 1)^2} \ = \ 0.0947 \ .$$

4. Definiamo γ il fattore di errore uniformemente distribuito su $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ e quindi $t_0 = \gamma\alpha T$. Ne segue che la distorsione di picco condizionata a γ è
$$d_p(\gamma) = \frac{\sum_{k\neq 0}|q(t_k)|}{|q(t_0)|} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{\alpha\gamma}\right) e^{-k/\alpha} = \frac{1}{e^{1/\alpha}-1} + \frac{e^{1/\alpha}}{\alpha\;\gamma\;(e^{1/\alpha}-1)^2}\;.$$
Pertanto, la distorsione di picco media vale
$$d_p = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d_p(x)\frac{dx}{2\varepsilon} = \frac{1}{e^{1/\alpha}-1} + \frac{e^{1/\alpha}}{\alpha\;(e^{1/\alpha}-1)^2}\,\frac{1}{2\varepsilon}\,\ln\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\;.$$

Soluzione esercizio 8.7

1. poiché $Q(f) = H_2((2T/\beta)f)$, è sufficiente verificare le due proprietà su $H_2(f)$.
Per quanto riguarda la realtà della risposta all'impulso, si verifica facilmente che
$$H_2(f)^* = \frac{1}{1-j\sqrt{2}f-f^2} \qquad \text{e} \qquad H_2(-f) = \frac{1}{1-j\sqrt{2}f-f^2}$$
sono uguali.
Per l'unilateralità consideriamo la trasformata di Laplace ottenuta attraverso la sostituzione $f \to s/(j2\pi)$ da cui si ottiene
$$H_2(s) = \frac{1}{1+\sqrt{2}\dfrac{s}{2\pi}+\dfrac{s^2}{4\pi^2}}\;.$$
I poli di $H_2(s)$ sono
$$s_{1,2} = \frac{-\sqrt{2}\pm j\sqrt{2}}{4\pi}$$
e stanno nella parte sinistra del piano complesso. Quindi, per una nota proprietà delle trasformate di Laplace, l'antitrasformata è unilatera.
Questa proprietà può essere riportata alle trasformate di Fourier nel modo seguente: *$H(f)$ è la trasformata di Fourier di una funzione unilatera se i suoi poli hanno parte immaginaria positiva*
2. Espandendo $H_2(f)$ in fratti semplici si ottiene
$$H_2(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{f-\frac{-1+j}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{f-\frac{1+j}{\sqrt{2}}}\right\}$$
e quindi, antitraformando si ottiene
$$h_2(t) = \frac{j2\pi}{\sqrt{2}}\left\{e^{j\sqrt{2}\pi(-1+j)t} - e^{j\sqrt{2}\pi(1+j)t}\right\}\,u(t) = 2\sqrt{2}\pi\;e^{-\sqrt{2}\pi t}\;\sin\;(\sqrt{2}\pi t)\;u(t)\;.$$
Poiché $Q(t) = H_2((2T/\beta)f)$, si ha
$$q(t) = \frac{\beta}{2T}\,h_2\left(\frac{\beta t}{2T}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi\beta}{T}\,e^{-\sqrt{2}\pi\beta t/(2T)}\;\sin\;\left(\frac{\sqrt{2}\pi\beta t}{2T}\right)\;u(t)\;.$$

3. Al fine di trovare l'istante ottimo di campionamento occorre trovare il massimo di $|h_2(t)|$. Il massimo di $h_2(x)$ si trova annullandone la derivata prima:

$$h_2'(x) \;=\; 4\pi^2\, e^{-\sqrt{2}\pi x}\, [-\sin\,(\sqrt{2}\pi x) \;+\; \cos\,(\sqrt{2}\pi x)] \;=\; 0$$

da cui

$$x_n \;=\; \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{n}{\sqrt{2}}, \quad n = 0{,}1,\ldots$$

Poiché

$$h(x_n) \;=\; (-1)^n\; 2\pi\; e^{-(n+1/4)\pi}\;,$$

il massimo valore assoluto si ha per $n = 0$, ovvero $x_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}}$. Pertanto l'istante ottimo di campionamento è

$$t_0 \;=\; \frac{2T}{\beta}\, x_0 \;=\; \frac{T}{2\sqrt{2}\beta}\;.$$

La distorsione di picco risultante è

$$D_p \;=\; \frac{\sum_{n\neq 0} |q(t_0+nT)|}{|q(t_0)|} \;=\; \frac{\sum_{n\neq 0} |h_2(x_0+n\beta/2)|}{|h_2(x_0)|}$$

$$=\; \frac{\sum_{n\neq 0, n>-1/(2\sqrt{2}\beta)} 2\pi\; e^{-(\pi/4+\sqrt{2}\pi n\beta/2)}\; |\sin\;(\pi/4+\sqrt{2}\pi n\beta/2)|}{2\pi\; e^{-\pi/4}\; |\sin\;(\pi/4)|}$$

$$=\; \sqrt{2} \sum_{n\neq 0, n>-1/(2\sqrt{2}\beta)} e^{-\sqrt{2}\pi n\beta/2} \left|\sin\;\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}\pi n\beta}{2}\right)\right|$$

Calcolando numericamente i termini della sommatoria si ottiene

n	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
1	0.4413	0.0206	0.0145
2	0.0206	0.0145	0.0000
3	0.0418	0.0017	0.0000
4	0.0145	0.0000	0.0000
5	0.0003	0.0000	0.0000
6	0.0017	0.0000	0.0000
7	0.0005	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0001	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000
D_p	0.5208	0.0368	0.0145

Per tutti i valori indicati di β la distorsione di picco è inferiore a 1 e quindi il diagramma ad occhio è aperto.

Si osservi che in tutti e tre i casi $\beta > 1/(2\sqrt{2}) = 0.3536$ per cui non occorre prendere in considerazione campioni a sinistra di x_0.

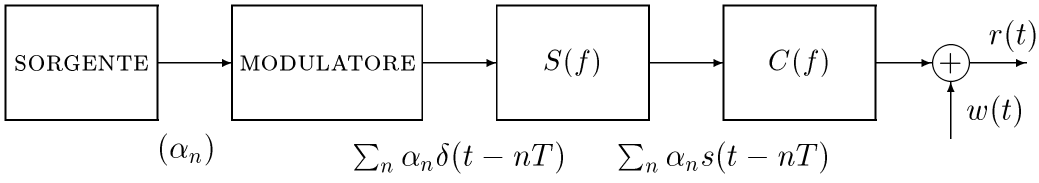
4. Occorre calcolare la distorsione di picco per alcuni valori di β. Si ottengono i risultati seguenti:

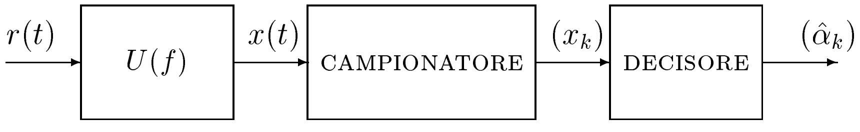
n	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.35$	$\beta = 0.34$	$\beta = 0.345$	$\beta = 0.348$	$\beta = 0.349$
-1		0.3268	0.0243	0.0906	0.0578	0.0378	0.0311
1	0.5785	0.7211	0.6499	0.6642	0.6570	0.6527	0.6513
2	0.1309	0.3184	0.2145	0.2337	0.2240	0.2183	0.2164
3	0.0300	0.0669	0.0032	0.0132	0.0081	0.0051	0.0042
4	0.0377	0.0300	0.0432	0.0425	0.0430	0.0431	0.0431
5	0.0145	0.0418	0.0290	0.0320	0.0305	0.0296	0.0293
6	0.0011	0.0259	0.0099	0.0125	0.0111	0.0104	0.0101
7	0.0019	0.0099	0.0003	0.0015	0.0009	0.0005	0.0004
8	0.0012	0.0011	0.0019	0.0017	0.0018	0.0018	0.0019
9	0.0003	0.0017	0.0013	0.0015	0.0014	0.0013	0.0013
10	0.0000	0.0017	0.0005	0.0007	0.0005	0.0005	0.0005
11	0.0001	0.0009	0.0000	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
13	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
14	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
D_p	0.7961	1.5467	0.9780	1.0945	1.0364	1.0014	0.9897

da cui si ottiene che il valore di $\beta \cong 0.348$ comporta la chiusura del diagramma ad occhio.

Questo valore corrisponde a $\beta \cong 2x_0$ ovvero il punto in cui iniziano a entrare i campioni interferenti a sinistra di quello principale.

Soluzione esercizio 8.8





Questo esercizio è una applicazione relativamente complessa del calcolo delle variazioni ad un problema di ottimizzazione.
Dai dati del problema si ottiene l'espressione del segnale ricevuto che entra nel campionatore:

$$x(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau - nT)\; h_U(t-\tau)\; d\tau \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\; h_U(t-\tau)\; d\tau \;.$$

dove $p(t) = s(t) * h_C(t)$ è una funzione reale.
Quindi si ottiene il campione all'istante $t_k = t_0 + kT$:

$$\begin{aligned}
x_k &= x(t_k) \\
&= \alpha_k \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau - kT)\; h_U(t_k-\tau)\; d\tau \;+\; \sum_{n\neq k} \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau - nT)\; h_U(t_k-\tau)\; d\tau \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\; h_U(t_k-\tau)\; d\tau \\
&= \alpha_k \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)\; h_U(t_0-\tau)\; d\tau \;+\; \sum_{n\neq 0} \alpha_{k+n} \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau - nT)\; h_U(t_0-\tau)\; d\tau \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau + kT)\; h_U(t_0-\tau)\; d\tau
\end{aligned}$$

Identifichiamo in x_k tre componenti:

- la parte utile, ovvero $\alpha_k \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) h_U(t_0-\tau) d\tau$;
- l'interferenza intersimbolica, ovvero $\sum_{n\neq 0} \alpha_{k+n} \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau - nT) h_U(t_0-\tau) d\tau$;
- il rumore gaussiano additivo $\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau + kT) h_U(t_0-\tau) d\tau$.

Poiché l'esercizio richiede di massimizzare il rapporto tra la potenza istantanea del segnale utile (σ_x^2) e la potenza dell'interferente intersimbolico più rumore ($\sigma_{\mathrm{ISI}}^2 + \sigma_n^2$), occorre determinare queste quantità.
Facendo ricorso all'indipendenza statistica delle α_n tra loro e con il rumore gaussiano bianco $w(t)$, e avendo posto $\beta(t) = h_U(t_0 - t)$, si ottiene

$$\begin{cases}
\sigma_x^2 &= A^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)\; \beta(\tau)\; d\tau \right]^2 \\
\sigma_{\mathrm{ISI}}^2 &= A^2 \sum_{n\neq 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau - nT)\; \beta(\tau)\; d\tau \right]^2 \\
\sigma_n^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\; |B(f)|^2\; df \;=\; \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau)^2\; d\tau
\end{cases}$$

dove $B(f)$ è la trasformata di Fourier di $\beta(t)$ e si è usata l'uguaglianza di Parseval nell'ultima espressione.

Pertanto, occorre massimizzare il funzionale

$$\eta[\beta(\tau)] \;=\; \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\mathrm{ISI}}^2+\sigma_n^2} \;=\; \frac{A^2\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)\;\beta(\tau)\;d\tau\right]^2}{A^2\sum_{n\neq 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau-nT)\;\beta(\tau)\;d\tau\right]^2 \;+\; \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\tau)^2\;d\tau}$$

Il calcolo diretto della variazione di $\eta[\beta]$ porterebbe ad una equazione integrale difficile da risolvere. Per questo motivo si affronta il problema imponendo un vincolo su $\beta(t)$: in questo modo il problema originario risulta scomposto in sottoclassi di cui è possibile trovare la soluzione. Poiché si tratta di un problema di massimo, la sua soluzione sarà data dal massimo delle soluzioni delle sottoclassi del problema.

Risolviamo dunque il problema seguente

$$\begin{cases} \min\limits_{\beta(t)}\;\; A^2\sum\limits_{n\neq 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau-nT)\;\beta(\tau)\;d\tau\right]^2 \;+\; \dfrac{N_0}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\tau)^2\;d\tau \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)\;\beta(\tau)\;d\tau \;=\; \gamma \quad \text{(costante)} \end{cases}$$

equivalente a rendere massimo $\eta[\beta]$ poiché si assume costante il numeratore. Questo problema può essere risolto ricorrendo al calcolo delle variazioni con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Pertanto, occorre calcolare la variazione rispetto a $\beta(t)$ del funzionale

$$\begin{aligned} D[\beta] \;=\; & A^2\sum_{n\neq 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau-nT)\;\beta(\tau)\;d\tau\right]^2 \;+\; \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\tau)^2\;d\tau \\ & +\;\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)\;\beta(\tau)\;d\tau-\gamma\right\}\;, \end{aligned}$$

dove λ è una costante che si determina dal vincolo.

Quindi si considera la funzione

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) \;=\; & A^2\sum_{n\neq 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau-nT)\;[\beta(\tau)+\varepsilon\psi(\tau)]\;d\tau\right\}^2 + \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\beta(\tau)+\varepsilon\psi(\tau)]^2\;d\tau \\ & +\;\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)\;[\beta(\tau)+\varepsilon\psi(\tau)]\;d\tau-\gamma\right\}\;, \end{aligned}$$

dove ψ rappresenta la variazione di β. Da qui, $\delta D[\beta]=\varphi'(0)$ si annulla se vale l'equazione

$$2A^2\sum_{n\neq 0} p(t-nT)\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau-nT)\;\beta(\tau)\;d\tau \;+\; N_0\,\beta(t) \;+\; \lambda\,p(t) \;=\; 0\;.$$

La variazione seconda è data dall'espressione

$$\delta^2 D[\beta] \;=\; \varphi''(0) \;=\; 2A^2\sum_{n\neq 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau-nT)\;\psi(\tau)\right]^2\;d\tau \;+\; N_0\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau)^2\;d\tau \;>\; 0$$

per cui qualsiasi punto di stazionarietà sarà un minimo. Questo è anche conseguenza del fatto che $\varphi(\varepsilon)$ è un polinomio di secondo grado positivo in ε.

Utilizzando il vincolo, si può scrivere l'equazione nel modo seguente:

$$2A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t-nT) \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau - nT)\ \beta(\tau)\ d\tau \ +\ N_0\ \beta(t)\ +\ (\lambda - 2A^2\gamma)\ p(t) \ =\ 0\ .$$

Per la soluzione di questa equazione integrale è necessario fare ricorso alla trasformata di Fourier. Trasformando, si ottiene:

$$2A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau - nT)\ \beta(\tau)\ d\tau\right] P(f)\ e^{-j2\pi nfT} \ +\ N_0\ B(f)\ =\ \lambda'\ P(f)\ ,$$

dove $P(f)$ è la trasformata di Fourier di $p(t)$ e $\lambda' = 2A^2\gamma - \lambda$.
I termini tra parentesi quadre della sommatoria possono essere espressi attraverso le funzioni trasformate nel modo seguente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau - nT)\ \beta(\tau)\ d\tau \ =\ \beta(t) * p(-t)|_{t=nT} \ =\ \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha)P(\alpha)^* e^{j2\pi n\alpha T}\ d\alpha\ .$$

Quindi, l'equazione integrale diventa

$$2A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha)P(\alpha)^*\ e^{j2\pi n\alpha T}\ d\alpha\right] P(f)\ e^{-j2\pi nfT} \ +\ N_0\ B(f)\ =\ \lambda'\ P(f)\ .$$

Ponendo

$$B(f) \ =\ P(f)\cdot\Gamma(f)^*$$

e semplificando, l'equazione diventa

$$2A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |P(\alpha)|^2\ \Gamma(\alpha)^*\ e^{j2\pi n\alpha T}\ d\alpha\right] e^{-j2\pi nfT} \ +\ N_0\ \Gamma(f)^*\ =\ \lambda'\ .$$

Poiché dal primo vincolo del problema $\Gamma(f)$ è la funzione di trasferimento di un filtro trasversale,

$$\Gamma(f) \ =\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\ e^{-j2\pi kfT}\ ,$$

periodica di periodo $1/T$. L'equazione da risolvere diventa

$$2A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k^* \left[\int_{-\infty}^{\infty} |P(\alpha)|^2\ e^{j2\pi(n-k)\alpha T}\ d\alpha\right] e^{-j2\pi nfT} \ +\ N_0\ \Gamma(f)^*\ =\ \lambda'\ .$$

Cambiando l'ordine delle sommatorie si ottiene

$$2A^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k^*\ e^{-j2\pi kfT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |P(\alpha)|^2\ e^{j2\pi(n-k)(\alpha-f)T}\ d\alpha \ +\ N_0\ \Gamma(f)^*\ =\ \lambda'\ .$$

Cambiando l'indice n della sommatoria interna in $m = n - k$, portandola all'interno dell'integrale diventa e riconoscendo $\Gamma(f)^*$ nella prima sommatoria, si ottiene

$$2A^2\ \Gamma(f)^* \int_{-\infty}^{\infty} |P(\alpha)|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi m(\alpha-f)T}\ d\alpha \ +\ N_0\ \Gamma(f)^*\ =\ \lambda'$$

che, utilizzando l'identità $\sum_n e^{j2\pi n\alpha} = \sum_n \delta(\alpha - n)$, diventa

$$2A^2\,\Gamma(f)^* \int_{-\infty}^{\infty} |P(\alpha)|^2\,\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\alpha - f - \frac{n}{T}\right)\,d\alpha \;+\; N_0\,\Gamma(f)^* \;=\; \lambda'\;.$$

Calcolando l'integrale e raccogliendo il fattore comune $\Gamma(f)^*$ si ha

$$\Gamma(f)^*\cdot\left\{\frac{2A^2}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|P\left(f+\frac{n}{T}\right)\right|^2 \;+\; N_0\right\} \;=\; \lambda'\;.$$

da cui

$$\Gamma(f) \;=\; \frac{\lambda''}{\dfrac{2A^2}{N_0T}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|P\left(f+\frac{n}{T}\right)\right|^2 \;+\; 1} \;=\; \lambda''\,\Gamma_0(f)\;,$$

dove $\lambda'' = \lambda'/N_0$. Imponendo il vincolo si trova la costante λ''. Infatti, da

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)\beta(\tau)d\tau = p(t)*\beta(-t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)B(f)^*\,df = \lambda''\int_{-\infty}^{\infty}|P(f)|^2\,\Gamma_0(f)\,df = \gamma$$

si ottiene

$$\lambda'' \;=\; \frac{\gamma}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|P(f)|^2\,\Gamma_0(f)\,df}\;.$$

Pertanto, la funzione di trasferimento del filtro di ricezione è la seguente:

$$U(f) \;=\; B(f)^*\,e^{j2\pi f t_0} \;=\; \lambda''\,P(f)^*\,\Gamma_0(f)\,e^{j2\pi f t_0}\;.$$

Il valore del rapporto segnale/rumore $\eta[\beta]$ si calcola riscrivendo il problema originario utilizzando le trasformate di Fourier:

$$\begin{cases} \sigma^2_{\mathrm{ISI}} + \sigma^2_n &= \lambda''^2 A^2 \displaystyle\sum_{n\neq 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|P(f)|^2\Gamma_0(f)e^{j2\pi n f T}df\right]^2 + \lambda''^2\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|P(f)|^2\Gamma_0(f)^2 df \\ \sigma^2_x &= \left[\lambda''\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|P(f)|^2\Gamma_0(f)\,df\right]^2 \;=\; \gamma^2 \end{cases}$$

Quindi si ha

$$\max_{\beta(t)}\;\eta[\beta(t)] \;=\; \frac{\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|P(f)|^2\Gamma_0(f)\,df\right]^2}{A^2\displaystyle\sum_{n\neq 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|P(f)|^2\Gamma_0(f)e^{j2\pi n f T}\,df\right]^2 \;+\; \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|P(f)|^2\Gamma_0(f)^2\,df}$$

che *non dipende* da γ ed è quindi il massimo assoluto per ogni possibile scelta di $\beta(t)$.

Per concludere, si osservi che il risultato è indipendente dall'istante di campionamento t_0: una sua variazione implica il ritardo o l'anticipo della risposta all'impulso del filtro di ricezione $h_U(t)$ e degli istanti di campionamento t_k e quindi lascia inalterati i campioni q_k.

La scelta di t_0 consente di approssimare l'equalizzatore $\Gamma_0(f)$ con una risposta all'impulso causale. Infatti, poiché $\Gamma_0(f)$ è una funzione reale e simmetrica, la risposta all'impulso è anch'essa reale e simmetrica e quindi non causale. Pertanto occorre approssimare la funzione di trasferimento su un intervallo limitato nel modo seguente:

$$\Gamma_0(f) \;\cong\; \sum_{k=-L}^{L} \gamma_k \, e^{-j2\pi kfT} \;,$$

e ritardarla del tempo $t_0 = LT$.

Soluzione esercizio 8.9

Il segnale $r(t)$ all'uscita del canale ha espressione:

$$r(t) = [x(t) + n(t)] * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n q(t - nT) + \nu(t)$$

dove:

$$\nu(t) = n(t) * h(t)$$

$$q(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\theta)h(t - \theta)\, d\theta$$

Dall'espressione della risposta all'impulso $h(t)$ si può notare che se $\tau \neq 0$ non si ha un filtro adattato; si calcoli ora $q(t)$ svolgendo l'integrale di convoluzione:

$$q(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} s(\theta)h(t - \theta)\, d\theta = \begin{cases} t & 0 < t \leq T \\ T & T < t \leq T{+}\tau \\ 2T{+}\tau - t & T{+}\tau < t \leq 2T{+}\tau \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Le prestazioni non dipendono dall'intervallo di campionamento in quanto i segnali sono ciclostazionari. Considerando l'istante di campionamento t_0, dall'espressione di $q(t)$ si nota che il coefficiente di α_0 è massimo e vale T se $T \leq t_0 \leq T + \tau$, quindi:

$$t_0 = T + \Delta \quad \text{con } \Delta \in [0,\tau] \;\;\Rightarrow\;\; t_k = t_0 + kT = (k + 1)T + \Delta$$

Utilizzando la notazione $q_k = q(t_k)$ è possibile esprimere il campione all'istante t_0 come:

$$r_0 \;=\; \alpha_0 q_0 + \alpha_{-1} q_{-1} + \alpha_1 q_1 + \nu_0 = \alpha_0 T + \alpha_1 \Delta + \alpha_{-1}\,(\tau{-}\Delta) + \nu_0$$

dove:

- $\alpha_0 q_0$ è il termine utile;

- $\alpha_{-1}q_{-1} + \alpha_1 q_1$ rappresenta il termine di interferenza intersimbolica;
- ν_0 indica il campione di rumore estratto da un processo gaussiano bianco filtrato;

La distorsione di picco vale, quindi:

$$D_p = \frac{\sum\limits_{i\neq 0} |q_i|}{|q_0|} = \frac{\tau}{T}$$

Soluzione esercizio 8.10

Il segnale all'uscita del canale assume la stessa espressione dell'esercizio precedente. Si consideri l'istante di campionamento:

$$t_0 = T + \Delta \quad \text{con } \Delta \in [0,\tau]$$

Tenendo conto dell'espressione di $q(t)$ già trovata si può scrivere l'espressione del valore quadratico medio dell'interferente:

$$\begin{aligned} E\left\{|\mathrm{ISI}|^2\right\} &= E\left\{|\alpha_{-1}|^2\right\} q_{-1}^2 + E\left\{|\alpha_1|^2\right\} q_1^2 = \\ &= \Delta^2 A^2 + (t-\Delta)^2 A^2 = 2\Delta^2 A^2 + \tau^2 A^2 - 2\tau\Delta A^2 \end{aligned}$$

Si minimizzi tale espressione, imponendo l'annullamento della derivata rispetto a Δ:

$$\frac{d}{d\Delta} E\left\{|\mathrm{ISI}|^2\right\} = 0 \;\Rightarrow\; 4\Delta A^2 - 2\tau A^2 = 0 \;\Rightarrow\; \Delta = \frac{\tau}{2}$$

Quindi, se $t_0 = T + \tau/2$, il valore quadratico medio del campione interferente vale:

$$E\left\{|\mathrm{ISI}|^2\right\} = \frac{\tau^2}{2} A^2$$

Si verifica facilmente che per altri valori di t_0 il valore quadratico medio del campione interferente assume valori maggiori (ad esempio se $t_0 \in [0,T]$ oppure $t_0 \in [T+\tau, 2T+\tau]$ si ha $E\{|\mathrm{ISI}|^2\} = \tau^2 A^2$). Quindi gli istanti di campionamento che minimizzano il valore quadratico medio del campione interferente sono:

$$t_k = t_0 + kT = (k+1)T + \frac{\tau}{2}$$

Soluzione esercizio 8.11

L'espressione del segnale $r(t)$ è la stessa del primo esercizio e le prestazioni non dipendono dall'intervallo di campionamento. Si consideri quindi l'istante di campionamento

$$t_0 = T + \Delta \quad \Delta \in [0,T]$$

e si utilizzino i risultati del primo esercizio relativi al campione r_0:

$$r_0 = \alpha_0 q_0 + \alpha_{-1} q_{-1} + \alpha_1 q_1 + \nu_0 = \alpha_0 T + \alpha_1 \Delta + \alpha_{-1}(\tau - \Delta) + \nu_0$$

L'espressione della probabilità d'errore è:

$$\begin{aligned} P(e) &= E_{\alpha_1,\alpha_{-1}}\left\{P(r_0 < 0 | \alpha_0 = A, \alpha_1, \alpha_{-1})\right\} = E_{\alpha_1,\alpha_{-1}}\left\{Q\left(\frac{AT + \alpha_1\Delta + \alpha_{-1}(\tau - \Delta)}{\sigma_\nu}\right)\right\} = \\ &= \frac{1}{4}Q\left(\frac{AT + A\tau}{\sigma_\nu}\right) + \frac{1}{4}Q\left(\frac{AT - A\tau}{\sigma_\nu}\right) + \frac{1}{4}Q\left(\frac{AT + 2A\Delta - A\tau}{\sigma_\nu}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{4}Q\left(\frac{AT - 2A\Delta + A\tau}{\sigma_\nu}\right) \end{aligned}$$

dove σ_ν è la varianza del rumore filtrato. Si tratta ora di minimizzare tale espressione, imponendo l'annullamento della derivata prima rispetto a Δ. Ricordando che:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\mu^2/2}\, d\mu \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}Q(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

e notando che σ_ν non dipende da Δ si trova:

$$\frac{d}{d\Delta}P(e) = \frac{1}{4}\left[-\frac{2A}{\sigma_\nu\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{A^2(T+2\Delta-\tau)^2}{2\sigma_\nu^2}} + \frac{2A}{\sigma_\nu\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{A^2(T-2\Delta+\tau)^2}{2\sigma_\nu^2}}\right]$$

Quindi:

$$\frac{d}{d\Delta}P(e) = 0 \quad \Rightarrow T + 2\Delta - \tau = T - 2\Delta + \tau \;\Rightarrow\; \Delta = \frac{\tau}{2}$$

Si noti che a tale risultato si perviene anche utilizzando la proprietà della funzione $Q(x)$:

$$\frac{1}{2}\left[Q(x_1) + Q(x_2)\right] \geq Q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} P(e) = &\ \frac{1}{4}\left[Q\left(\frac{AT + A\tau}{\sigma_\nu}\right) + Q\left(\frac{AT - A\tau}{\sigma_\nu}\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{4}\left[Q\left(\frac{AT - A\tau}{\sigma_\nu}\right) + Q\left(\frac{AT + 2A\Delta - A\tau}{\sigma_\nu}\right)\right] \geq \\ &\geq \frac{1}{4}\left[Q\left(\frac{AT + A\tau}{\sigma_\nu}\right) + Q\left(\frac{AT - A\tau}{\sigma_\nu}\right) + 2Q\left(\frac{AT}{\sigma_\nu}\right)\right] \end{aligned}$$

dove il segno di uguaglianza vale solo se $\Delta = \tau/2$. La probabilità d'errore è minima se $t_0 = T + \tau/2$.

Soluzione esercizio 8.12

Lo schema di trasmissione è lo stesso del primo esercizio, per cui il segnale $z(t)$ da campionare vale:

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n q(t - nT) + \nu(t)$$

dove:

$$q(t) = s(t) * h(t) = \frac{1}{T} s(t) * s(t) = \begin{cases} \frac{t}{T} & 0 \leq t \leq T \\ \frac{2T-t}{T} & T < t \leq 2T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

L'istante di campionamento ottimo è $t_k^* = T + kT$, in quanto è soddisfatto il teorema di Nyquist ($q(t_k) = 0$ per $k \neq 0$) e non si ha interferenza intersimbolica. Se invece $t_k = t_k^* + \varepsilon$ si avrà:

- con $\varepsilon < 0$ un campione interferente precursore;
- con $\varepsilon = 0$ nessun campione interferente e ovviamente risulta $D_p = 0$;
- con $\varepsilon > 0$ un campione interferente postcursore;

Si calcoli ora la distorsione di picco D_p:

$$\begin{aligned} D_p &= \frac{\sum_{i \neq 0} |q_i|}{|q_0|} = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon/T}{(T-\varepsilon)/T} = \dfrac{\varepsilon}{T-\varepsilon} & \varepsilon > 0 \\[2ex] \dfrac{-\varepsilon/T}{(T+\varepsilon)/T} = \dfrac{\varepsilon}{T+\varepsilon} & \varepsilon < 0 \end{cases} \\ &= \frac{|\varepsilon|}{T-|\varepsilon|} \end{aligned}$$

Poiché:

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{M}{2T} & -\frac{T}{M} \leq \varepsilon \leq \frac{T}{M} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

la media $E[D_p]$ della distorsione di picco D_p vale:

$$E[D_p] \;=\; E[\frac{|\varepsilon|}{T-|\varepsilon|}] = \int_{-\infty}^{\infty} D_p f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{M}{2T}\int_{-T/M}^{T/M} \frac{|\varepsilon|}{T-|\varepsilon|}\, d\varepsilon = \frac{M}{T}\int_{0}^{T/M} \frac{\varepsilon}{T-\varepsilon}\, d\varepsilon =$$

$$= -\frac{M}{T}\int_{0}^{T/M}\left(1-\frac{T}{T-\varepsilon}\right) d\varepsilon = -1-\frac{M}{T}\left[T\ln(T-\varepsilon)\right]_0^{T/M} = -1-M\ln\left(\frac{M-1}{M}\right) =$$

$$= M\ln\left(\frac{M}{M-1}\right) - 1$$

Soluzione esercizio 8.13

Il segnale ricevuto all'uscita del canale vale:

$$y(t) = h(t) * x(t) + n(t) = \sum_k \alpha_k p(t-kT) + n(t)$$

dove:

$$p(t) = h(t) * x(t) = s(t) + \frac{1}{2}s\left(t-\frac{T}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & -\frac{T}{2} \le t \le 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{T}} & 0 < t \le \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{T}} & \frac{T}{2} < t \le T \end{cases}$$

Il segnale all'uscita del filtro adattato $s(t)$ vale:

$$r(t) = \sum_k \alpha_k f(t-kT) + \nu(t)$$

dove:

$$\nu(t) = n(t) * s(t)$$

e:

$$f(t) = p(t) * s(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}(t+T) & -T \le t \le -\frac{T}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2T}(t+\frac{T}{2}) & -\frac{T}{2} < t \le 0 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{T}(\frac{T}{2}-\frac{t}{2}) & 0 < t \le \frac{T}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{2T}(T-t) & \frac{T}{2} < t \le T \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2T}(T-t) & T < t \le \frac{3T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

I campioni del segnale $r(t)$ all'uscita del filtro adattato valgono:

$$r_k = r(kT) = \sum_l \alpha_l f(kT - lT) + \nu(kT) = \sum_l \alpha_l f_{k-l} + \nu_k$$

La variabile casuale ν_k è una gaussiana a media nulla e varianza:

$$\begin{aligned}
\sigma_\nu^2 &= E[\nu_k^2] = E[\int_{-\infty}^{\infty} s(\theta)n(kT-\theta)\,d\theta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda)n(kT-\lambda)\,d\lambda = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[n(kT-\theta)n(kT-\lambda)]s(\theta)s(\lambda)\,d\theta\,d\lambda = \\
&= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} s^2(\theta)\,d\theta = \frac{N_0}{2}
\end{aligned}$$

Si consideri ora il caso senza equalizzatore. Analizzando l'espressione di $f(t)$ si nota che si ha un solo campione interferente precursore, per cui si può scrivere:

$$r_k = \alpha_k f_0 + \alpha_{k-1} f_1 + \nu_k$$

La distorsione di picco vale quindi:

$$D_p = \frac{|f_1|}{|f_0|} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Poiché il decisore ha soglia zero, l'espressione della probabilità d'errore è:

$$\begin{aligned}
P(e) &= P(r_k < 0 | \alpha_k = +\sqrt{\mathcal{E}_b}) = \frac{1}{2}P(\sqrt{\mathcal{E}_b}f_0 + \sqrt{\mathcal{E}_b}f_1 + \nu_k < 0) + \\
&+ \frac{1}{2}P(\sqrt{\mathcal{E}_b}f_0 - \sqrt{\mathcal{E}_b}f_1 + \nu_k < 0) = \frac{1}{2}Q\left(\frac{(f_0+f_1)\sqrt{\mathcal{E}_b}}{\sigma_\nu}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{(f_0-f_1)\sqrt{\mathcal{E}_b}}{\sigma_\nu}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Con $\mathcal{E}_b/N_0 = 10$ dB si ottiene $P(e) \cong 1.94 \cdot 10^{-6}$.
Utilizzando l'equalizzatore si ha:

$$z_k = c_{-1}r_{k-1} + c_0 r_k + c_1 r_{k+1}$$

Poiché:

$$\begin{aligned}
r_k &= \alpha_k f_0 + \alpha_{k-1} f_1 + \nu_k \\
r_{k-1} &= \alpha_{k-1} f_0 + \alpha_{k-2} f_1 + \nu_{k-1} \\
r_{k+1} &= \alpha_{k+1} f_0 + \alpha_k f_1 + \nu_{k+1}
\end{aligned}$$

si ottiene:

$$
\begin{aligned}
z_k &= c_{-1} f_1 \alpha_{k-2} + (c_{-1} f_0 + c_0 f_1)\alpha_{k-1} + (c_0 f_0 + c_1 f_1)\alpha_k + c_1 f_0 \alpha_{k+1} + \\
&+ c_{-1}\nu_{k-1} + c_0 \nu_k + c_1 \nu_{k+1} = \sum_n \alpha_{k-n} q_n + \nu_e
\end{aligned}
$$

dove ν_e è ancora una gaussiana avente media nulla e varianza:

$$\sigma_e^2 = (c_{-1}^2 + c_0^2 + c_1^2)\frac{N_0}{2}$$

Con $q_n = q(nT)$ si è invece indicata la risposta complessiva del canale tempo-discreto con ingresso α_k e uscita z_k. Si ha dunque:

$$q_n = \begin{cases} c_1 f_0 & n = -1 \\ c_0 f_0 + c_1 f_1 & n = 0 \\ c_{-1} f_0 + c_0 f_1 & n = 1 \\ c_1 f_1 & n = 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Imponendo $q_0 = 1$ e $q_{n-1} = q_{n+1} = 0$ si ottengono i seguenti valori dei coefficienti dell'equalizzatore:

$$\begin{cases} c_0 f_0 + c_1 f_1 = 1 \\ \\ c_1 f_0 = 0 \\ \\ c_{-1} f_0 + c_0 f_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_{-1} = -\frac{4}{25} \\ \\ c_0 = \frac{4}{5} \\ \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo tali coefficienti nell'espressione di z_k si ottiene:

$$z_k = \alpha_k q_0 + \alpha_{k-2} q_2 + \nu_e = \alpha_k - \frac{1}{25}\alpha_{k-2} + \nu_e$$

dove:

$$\nu_e \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{416}{625}\frac{N_0}{2}\right)$$

La distorsione di picco D_p vale:

$$D_p = \frac{|q_2|}{|q_0|} = \frac{1}{25}$$

minore del caso senza equalizzatore. La probabilità d'errore è:

$$
\begin{aligned}
P(e) &= P(z_k < 0 | \alpha_k = \sqrt{\mathcal{E}_b}) = \\
&= \frac{1}{2} P(\sqrt{\mathcal{E}_b} - \frac{1}{25}\sqrt{\mathcal{E}_b} + \nu_e < 0) + \frac{1}{2} P(\sqrt{\mathcal{E}_b} + \frac{1}{25}\sqrt{\mathcal{E}_b} + \nu_e < 0) = \\
&= \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{24\sqrt{\mathcal{E}_b}}{25\sigma_e}\right) + Q\left(\frac{26\sqrt{\mathcal{E}_b}}{25\sigma_e}\right)\right] =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\left[Q\left(6\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{13N_0}}\right)+Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)\right]$$

Con $\mathcal{E}_b/N_0 = 10$ dB si trova $P(e) \cong 3.\,85\ 10^{-8}$, minore di quella senza equalizzatore. Per il calcolo dei coefficienti che minimizzano l'errore quadratico medio si introducano le seguenti notazioni:

$$\mathbf{c} \;=\; \begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}_k = \begin{pmatrix} r_{k-1} \\ r_k \\ r_{k+1} \end{pmatrix}$$

Si può quindi scrivere:

$$z_k = \mathbf{c}^{'} \cdot \mathbf{r}_k$$

dove $\mathbf{c}^{'}$ indica il vettore trasposto di $\mathbf{c}$. L'errore quadratico medio vale quindi:

$$\varepsilon^2 \;=\; E[|z_k - \alpha_k|^2] = E\left[\mathbf{c}^{'}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}^{'}\mathbf{c} + \alpha_k^2 - 2\alpha_k\mathbf{c}^{'}\cdot\mathbf{r}\right] = \mathbf{c}^{'}\cdot X\cdot\mathbf{c} + \sigma_0^2 - 2\mathbf{c}^{'}\cdot\mathbf{v}$$

dove:

$$X = E[\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k^{'}] \qquad \mathbf{v} = E[\alpha_k \mathbf{r}_k] \qquad \sigma_0^2 = E[\alpha_k^2] = \mathcal{E}_b$$

Per trovare il vettore $\mathbf{c}$ che minimizza l'errore quadratico medio è sufficiente imporre l'annullamento del gradiente di quest'ultimo rispetto a $\mathbf{c}$. Si ottiene:

$$\nabla\varepsilon^2(\mathbf{c}) \;=\; 2(X\mathbf{c} - \mathbf{v}) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{c}_{opt} = X^{-1}\cdot\mathbf{v}$$

Si calcolino ora X^{-1} e $\mathbf{v}$:

$$X \;=\; E\begin{bmatrix} r_{k-1}r_{k-1} & r_{k-1}r_k & r_{k-1}r_{k+1} \\ r_k r_{k-1} & r_k r_k & r_k r_{k+1} \\ r_{k+1}r_{k+1} & r_{k+1}r_k & r_{k+1}r_{k+1} \end{bmatrix}$$

dove:

$$\begin{aligned} E[r_k\, r_{k+l}] \;&=\; E[(f_0\alpha_k + f_1\alpha_{k-1} + \nu_k)\cdot(f_0\alpha_{k+l} + f_1\alpha_{k-1+l} + \nu_{k+l})] \\ &=\; E\left[f_0^2\alpha_k\alpha_{k+l} + f_0f_1\alpha_k\alpha_{k-1+l} + f_0f_1\alpha_{k-1}\alpha_{k+l} + f_1^2\alpha_{k-l}\alpha_{k-1+l} + \nu_k\nu_{k+l}\right] = \\ &=\; \begin{cases} \mathcal{E}_b(f_0^2+f_1^2) + \frac{N_0}{2} & l = 0 \\ f_0f_1\mathcal{E}_b & l = \pm 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Si noti che si è ottenuto tale risultato in quanto i simboli α_k sono indipendenti. Indicando con $\alpha = (f_0^2 + f_1^2)$ e $\beta = f_0 \cdot f_1$ si ha:

$$X = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_b\alpha + \frac{N_0}{2} & \beta\mathcal{E}_b & 0 \\ \beta\mathcal{E}_b & \mathcal{E}_b\alpha + \frac{N_0}{2} & \beta\mathcal{E}_b \\ 0 & \beta\mathcal{E}_b & \mathcal{E}_b\alpha + \frac{N_0}{2} \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0\mathcal{E}_b \\ f_1\mathcal{E}_b \end{pmatrix}$$

Si calcoli ora la matrice inversa X^{-1}:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ b & d & b \\ e & b & a \end{pmatrix}$$

dove:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\left(\mathcal{E}_b\alpha + \frac{N_0}{2}\right)^2 - \beta^2\mathcal{E}_b^2}{\det X} \\ b &= \frac{-\beta E_b\left(\mathcal{E}_b\alpha + \frac{N_0}{2}\right)}{\det X} \\ d &= \frac{\left(\mathcal{E}_b\alpha + \frac{N_0}{2}\right)^2}{\det X} \\ e &= \frac{\beta^2\mathcal{E}_b^2}{\det X} \\ \det X &= \left(\mathcal{E}_b\alpha + \frac{N_0}{2}\right)\left[\left(\mathcal{E}_b\alpha + \frac{N_0}{2}\right)^2 - \beta^2\mathcal{E}_b^2\right] - \beta^2\mathcal{E}_b^2\left(E_b\alpha + \frac{N_0}{2}\right) = \\ &= \left(\mathcal{E}_b\alpha + \frac{N_0}{2}\right)\left[\left(\mathcal{E}_b\alpha + \frac{N_0}{2}\right)^2 - 2\beta^2\mathcal{E}_b^2\right] \end{aligned}$$

In definitiva si ha:

$$\mathbf{c}_{opt} = X^{-1}\cdot\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_b(bf_0 + ef_1) \\ E_b(df_0 + bf_1) \\ E_b(bf_0 + af_1) \end{pmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\frac{E_b}{N_0} = 10 \text{ dB} \quad f_0 = \frac{5}{4} \quad f_1 = \frac{1}{4} \quad \alpha = \frac{13}{8} \quad \beta = \frac{5}{16}$$

si ottiene:

$$\mathbf{c}_{opt} = \begin{pmatrix} c_{-1} \\ \\ c_0 \\ \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1441 \\ \\ 0.7722 \\ \\ 0.0052 \end{pmatrix}$$

Il procedimento adottato vale in generale e permette di calcolare i coefficienti ottimi $\mathbf{c}_{opt}$ delle prese dell'equalizzatore noto il canale e le caratteristiche del rumore. In questo caso particolare si può anche procedere in modo più diretto sviluppando:

$$\varepsilon^2 = E[|\alpha_{k-2}h_2 + \alpha_{k-1}h_1 + \alpha_k h_0 + \alpha_{k+1}h_{-1} + \nu_e - \alpha_k|^2]$$

e imponendo:

$$\nabla\varepsilon^2(\mathbf{c}) = 0$$

Così facendo si perviene a un sistema equivalente a $X\mathbf{c} = \mathbf{v}$.

Capitolo 9

Calcolo del bilancio di tratta (link budget) (soluzioni)

Soluzione esercizio 9.1

1. Nel caso di satelitte non rigenerativo si può utilizzare la relazione:

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{tot}} = \left[\mathrm{SNR}_{\mathrm{up}}^{-1} + \mathrm{SNR}_{\mathrm{down}}^{-1}\right]^{-1}$$

Si analizzino ora i vari termini costituenti l'espressione precedente. Il rapporto segnale rumore per la tratta in salita è esprimibile come:

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{up}} = \frac{S_{\mathrm{up}}}{N_{\mathrm{up}}}$$

La potenza ricevuta dal satellite S_{up} vale:

$$S_{\mathrm{up}} = P_t G_{\mathrm{txu}} G_{\mathrm{rxu}} \frac{1}{L_a} \left(\frac{\lambda_{\mathrm{up}}}{4\pi d}\right)^2$$

mentre la potenza di rumore nella tratta di *uplink* è:

$$N_{\mathrm{up}} = k\left(T_{\mathrm{au}} + T_{\mathrm{eu}}\right) B_{\mathrm{x}}$$

dove:

$$B_{\mathrm{x}} = \frac{1+\alpha}{T} = (1+\alpha) R_s = (1+\alpha)\frac{R_b}{\log_2 M} = \frac{R_b}{r}$$

Il rapporto segnale-rumore $\mathrm{SNR}_{\mathrm{up}}$ vale, quindi:

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{up}} = P_t G_{\mathrm{txu}} G_{\mathrm{rxu}} \frac{1}{L_a} \left(\frac{\lambda_{\mathrm{up}}}{4\pi d}\right)^2 \cdot \frac{1}{k\left(T_{\mathrm{au}} + T_{\mathrm{eu}}\right) B_{\mathrm{x}}} = K_{\mathrm{up}} r P_t$$

dove:

- P_t è la potenza trasmessa dalla stazione di terra;
- con K_{up} si è indicato un coefficiente caratteristico dell'*uplink* che vale:

$$K_{\text{up}} = \frac{G_{\text{txu}} G_{\text{rxu}} \lambda_{\text{up}}^2}{(4\pi d)^2 L_a k \left(T_{\text{au}} + T_{\text{eu}}\right) R_b} = 628.\,53 \text{ W}^{-1}\text{bit}^{-1}$$

- $r = \dfrac{\log_2 M}{1+\alpha} = \dfrac{2}{1+\alpha} = 1.\,48$ bit poiché si utilizza una modulazione 4-PSK con roll-off α

Si conderi ora il *downlink*. La potenza S_{down} ricevuta dalla stazione di terra vale:

$$S_{\text{down}} = P_s G_{\text{txd}} G_{\text{rxd}} \frac{1}{L_a} \left(\frac{\lambda_{\text{down}}}{4\pi d}\right)^2$$

mentre la potenza di rumore N_{down} è:

$$N_{\text{down}} = k \left(T_{\text{ad}} + T_{\text{ed}}\right) B_{\text{x}}$$

dove T_{ed}, che indica la temperatura equivalente di rumore della stazione di terra, vale:

$$T_{\text{ed}} = T_{\text{e1}} + \frac{T_{\text{eL}}}{G_1} + \frac{T_{\text{e2}}}{G_1 \cdot G_L} = 58.\,9°\text{K}$$

essendo:

$$\begin{aligned}
T_{\text{eL}} &= \text{Temp. equivalente della linea} = (L-1)T_L = (2-1)\cdot 290 = 290°\text{K} \\
G_L &= \frac{1}{L} = -3 \text{ dB} \;\Rightarrow\; G_L = \frac{1}{2} \\
T_{\text{e}_1} &= 50°\text{K} \\
T_{\text{e}_2} &= 300°\text{K} \\
G_1 &= 20 \text{ dB} \;\Rightarrow\; G_1 = 100
\end{aligned}$$

Il rapporto segnale-rumore per il *downlink* è:

$$S_{\text{down}} = P_s G_{\text{txd}} G_{\text{rxd}} \frac{1}{L_a} \left(\frac{\lambda_{\text{down}}}{4\pi d}\right)^2 \cdot \frac{1}{k \left(T_{\text{ad}} + T_{\text{ed}}\right) B_{\text{x}}} = K_{\text{down}} r P_s$$

dove:

- P_s è la potenza trasmessa dal satellite;
- con K_{down} si è indicato un coefficiente caratteristico del *downlink* che vale:

$$K_{\text{down}} = \frac{G_{\text{txd}} G_{\text{rxd}} \lambda_{\text{down}}^2}{(4\pi d)^2 L_a k \left(T_{\text{ad}} + T_{\text{ed}}\right) R_b} = 720.\,73 \text{ W}^{-1}\text{bit}^{-1}$$

- r è lo stesso dell'*uplink*

Poiché si utilizza una modulazione 4-PSK, l'espressione della probabilità è:

$$P_b(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

Il minimo valore di $\mathcal{E}_b/N_0$ per garantire una $P_b(e) = 10^{-5}$ vale, quindi:

$$\left(\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}\right)_{\text{target}} = 9.57 \text{ dB}$$

Tenendo conto che:

$$\left(\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}\right)_{\text{target}} = \frac{P_{\text{rx}}}{R_b} \cdot \frac{B_{\text{x}}}{B_{\text{x}} N_0} = (\text{SNR})_{\text{tot}} \cdot \frac{1}{r}$$

si ha:

$$(\text{SNR})_{\text{tot}} = r \cdot \left(\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}\right)_{\text{target}} = \left[\frac{1}{K_{\text{up}} r P_t} + \frac{1}{K_{\text{down}} r P_s}\right]^{-1}$$

Ponendo per semplicità di scrittura

$$\gamma = \left(\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}\right)_{\text{target}}$$

e sostituendo il valore della massima potenza che si può trasmettere da terra $P_t =$ 300mW si ricava:

$$P_s = \frac{\gamma P_t k_{\text{up}}}{k_{\text{up}} k_{\text{down}} P_t - \gamma k_{\text{down}}} = 13 \text{ mW}$$

2. Per il satellite rigenerativo si può rappresentare la cascata dell'*uplink* e del *downlink* come la cascata di due canali binari simmetrici, con probabilità di errore p_{up} e p_{down}. In questo modo la probabilità d'errore dell'intero sistema vale:

$$P_b(e) = p_{\text{up}}(1 - p_{\text{down}}) + p_{\text{down}}(1 - p_{\text{up}}) = p_{\text{up}} + p_{\text{down}} - 2p_{\text{up}}p_{\text{down}} \cong p_{\text{up}} + p_{\text{down}}$$

Si consideri ora l'*uplink*. Il rapporto segnale-rumore è esprimibile come:

$$S_{\text{up}} = K_{\text{up}} r P_t = \frac{\mathcal{E}_b}{N_0} r$$

Considerando la massima potenza da terra $P_t = 300$mW, è possibile ricavare $\mathcal{E}_b/N_0$:

$$\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} = K_{\text{up}} P_t = 188.59 \ \Rightarrow \ 22.75 \text{ dB}$$

La probabilità d'errore sul bit per l'*uplink* che utilizza una modulazione 4-PSK vale:

$$p_{\text{up}} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right)$$

Sostituendo il valore di $\mathcal{E}_b/N_0$ precedentemente trovato si ha:

$$p_{\text{up}} = 10^{-80}$$

Imponendo che la probabilità d'errore dell'intero sistema sia inferiore a $P_b(e) = 10^{-5}$, si trova la probabilità d'errore per il *downlink*:

$$p_{\text{down}} = P_b(e) - p_{\text{up}} = 10^{-5} - 10^{-80} = 10^{-5}$$

da cui:

$$p_{\text{down}} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}\right)_{\text{target}} = 9.57 \text{ dB} \;\Rightarrow\; 9.0573$$

Tenendo conto dell'espressione del rapporto segnale-rumore per il *downlink*:

$$S_{\text{down}} = K_{\text{down}} r P_s = \left(\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}\right)_{\text{target}} r$$

è possibile ricavare il valore della minima potenza P_s trasmessa dal satellite:

$$P_s = \frac{1}{K_{\text{down}}} \cdot \left(\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}\right)_{\text{target}} = 12.6 \text{ mW}$$

Si noti che nel caso di satellite non rigenerativo, a parità di potenza trasmessa da terra, per garantire le prestazioni richieste è necessario utilizzare una potenza trasmessa dal satellite di poco maggiore rispetto al caso rigenerativo.

Appendice A

Questa appendice contiene il diagramma di $\mathrm{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz$ e $\frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\sqrt{x}$ in funzione di $10 \log_{10} x$. Esso consente di risolvere problemi di inversione della funzione $\mathrm{Erfc}(\cdot)$. Per esempio, se occorre trovare il valore di E_b/N_0 per cui una modulazione QPSK coerente dà probabilità di errore sul bit 10^{-4} ($P_b = \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$), è sufficiente leggere l'ascissa corrispondente all'ordinata 10^{-4} del diagramma superiore e si ottiene 8.4 dB.

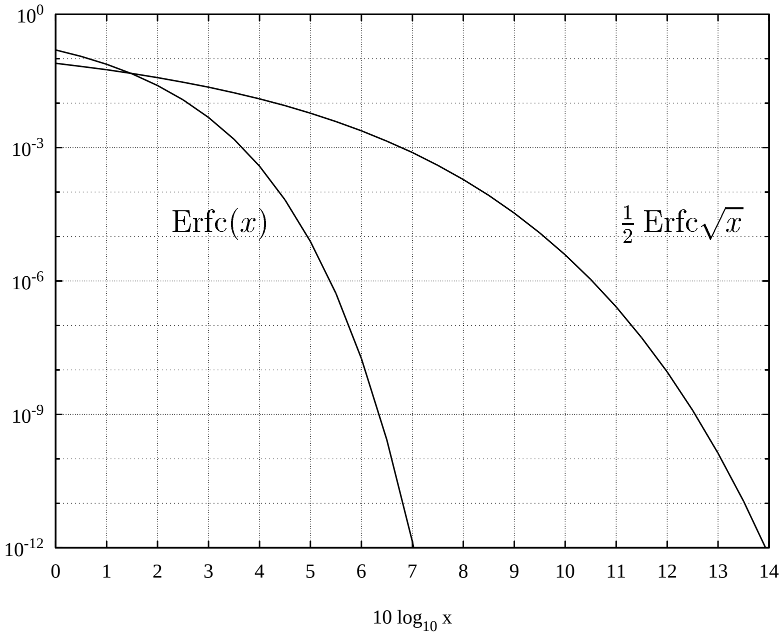


Grafico di $\mathrm{Erfc}(x)$ **e** $\frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\sqrt{x}$ **in funzione di** $10 \log_{10} x$.

La funzione $Q(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_x^\infty e^{-z^2/2} dz$ è legata alla $\mathrm{Erfc}(x)$ tramite le seguenti relazioni

$$\mathrm{Erfc}(x) = 2Q(\sqrt{2}x) \qquad Q(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}(x/\sqrt{2})$$